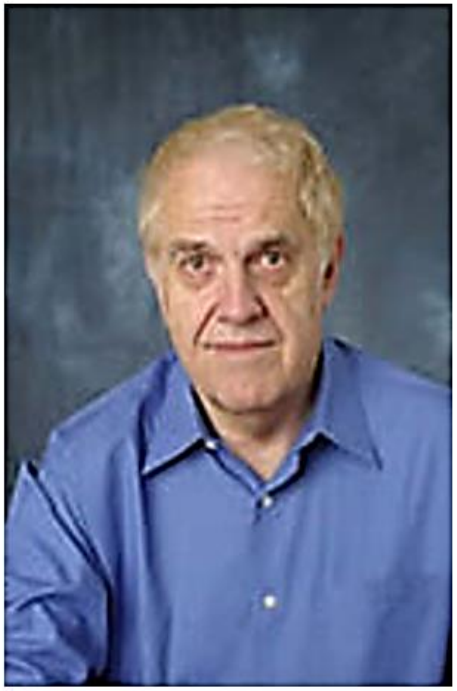
INTRODUCTION to FINITE ELEMENT METHODS

CARLOS A. FELIPPA

Department of Aerospace Engineering Sciences
and Center for Aerospace Structures
University of Colorado
Boulder, Colorado 80309-0429, USA

Last update Fall 2001



Professor Carlos A. Felippa

Aerospace Engineering Sciences
University of Colorado, Boulder

Focus Area: Structural & Material Systems

Education:
Ph.D., Civil Engineering, University of California, Berkeley, 1966
M.S., Civil Engineering, University of California, Berkeley, 1964
Ingeniero Civil, University Nacional de Cordoba (Argentina), 1963

CAE 해석개요

학습목표 : 유한요소법의 개념과 활용에 대해 학습한다.

- CAE 개념
- 유한요소법의 개요
- 유한요소법의 역사
- 유한요소법의 활용
- 국내에서 사용되는 공학 해석프로그램

CAE의 개념

- CAE(Computer Aided Engineering)는 컴퓨터를 이용하여 제품의 성능을 검토하고 개선하는 기술
- 제품의 설계, 개발단계에서 부터 컴퓨터를 응용하는 기술로써 컴퓨터를 이용한 모의시험을 통해 테스트 기간 및 비용을 대폭 감소시킬 수 있는 기술
- 기획, 설계, 제조, 수리 등 제품 생산의 모든 과정을 통합하는 개념
- 국내에는 80년대 후반 대기업을 중심으로 적용되기 시작했으며 현재는 각 분야별로 세분화/전문화되는 추세
- 초창기 도입은 주로 해외연구소나 CAE전공 교수들을 중심으로 국내에 소개/전파 되었으나 지금은 컴퓨터 환경의 저변이 확대되어 설계엔지니어들까지 확산
- CAE도입 시 효과와 투자비, 그리고 운용할 수 있는 인력구성에 대한 다각도의 검토가 필요

- ✓ 선형 또는 비선형 정적 해석
- ✓ 동적해석
- ✓ 접촉 충돌해석
- ✓ 피로해석
- ✓ 열전달 해석
- ✓ 유동해석
- ✓ 진동/소음해석
- ✓ 전자기 해석

유한요소법의 개요

- 힘을 받는 물체의 제작 시 오래 전에는 설계자가 경험에 의해 손상되지 않도록 제작
- 역학의 발전에 힘 입어 구조물의 이론적인 설계를 할 수 있었고 수학적으로 구조물의역학적 거동을 알 수 있었음
- 그러나 복잡한 형상과 다양한 힘을 받는 물체는 내부에 발생하는 변형과 힘을 알아야 적절한 설계가 가능하지만, 무한한 점에서 수학적 정해를 얻기가 불가능하여 물체의 유한한 위치에서 근사 해를 얻는 방법을 사용함.
- 트러스 구조의 구조역학으로 접근하자면
  트러스 각 부재로 분할 → 부재별 거동을 대수방정식화 → 행렬방정식으로 조합 → 부재별 변형과 하중을 도출 함
- 연속체 역시 동일한 방법으로 분할하며 분할한 각 구조부재를 요소라고 함(2차원, 3차원 요소들이 존재)
- 연속체 유한요소의 수학적 관점은 편미분 방정식의 이산화 해법 임
- 즉, 연속체 거동은 어떤 경계를 가진 영역에 대하여 영역내의 편미분 방정식과 경계상의 경계조건으로 표현가능
- 이러한 편미분 방정식의 경계치 문제해석방법은 오래 전부터 연구되어 왔으며 현재는 유한차분법, 유한요소범, 경계요소법 등으로 정립 됨
- 유한요소법은 절점을 자유롭게 선택하는 것이 가능하므로 경계형상에 잘 근사 하는 것이 가능하며 해석영역의 어떤 부분을 상세하게 조사하기 위해서 그 영역에 많은 절점을 배치하여 해석정밀도를 높이는 것도 가능
- 유한요소법은 구조해석으로부터 발전해 왔으나 현재는 유체유동문제, 열전달문제, 전자기 문제, 음향문제 등 편미분 방정식으로 표현되는 다양한 분야에서도 이용되고 있음
- 해석을 수해하는 사용프로그램들도 여러 회사에서 개발되어 판매되고 있으므로 현대 산업 전 분야에서 필수적 도구

유한요소법의 역사

- 근대 유한요소법은 1940년대 Hrennikoff, McHenry, Courant등에 의해 시작되었으며 유한요소라는 용어는 1960년 Clough에 의해 처음 소개
- 1960년대 초반 Martin, Melosh등에 의해 4면체 요소가 개발됨으로써 유한요소법이 3차원으로 확장
- 1963년 Melosh가 유한요소법이 변분 정식화 형태로 공식화 되어 발전함으로써 구조 외 타 분야까지 응용
- 최근에는 컴퓨터 성능발전 및 수치해석 알고리즘 발달로 의공학 분야 등 광범위한 영역까지 응용됨

- 제조산업과의 연관
- 1950년 항공기 제조업이 발달하면서 고속화된 날개와 동체를 연구하면서 보잉사와 런던대학의 공동연구로 토대가 마련
- 동일한 시기에 IBM사가 세계최초로 공학계산용 IMB650을 개발하면서 대형행렬연산 처리가능 하면서 70년대 급속발전
- 근래에서는 상업용 프로그램이 다양하네 보급되어 대부분의 공학문제를 쉽게 풀 수 있는 시뮬레이션 기술로 각광

유한요소법의 활용

- 유한요소는 설계해석을 위한 수치해석의 한 분야이며 요소라는 단순모양을 이용하여 복잡한 문제를 해결하는 방법
- 요소(Element)는 절점(Node)이라는 점으로 이루어 지며 모델을 작은 조각으로 나누는 작업을 요소분할(Meshing)이라 함
- 절점은 결과(해)가 계산되는 위치이며 요소의 모양과 위치를 정의함
- 절점의 미지수를 자유도(DOF)라고 하며 구조해석의 변위, 열 해석의 온도 등이 자유도가 됨

✓ FEM 해석의 장점

- 불규칙모양, 여러 가지 하중조건을 쉽게 모델링
- 각 요소에 대해 서로 다른 방정식으로 문제를 풀기 때문에 다른 물질로 구성된 물체의 모델링에 편리함
- 필요에 따라 특정부위의 요소크기를 작거나 크게 하는 등 요소의 크기를 자유롭게 선정
- 동역학 및 대변형을 수반하는 비선형 거동도 해석가능

✓ FEM 해석의 단점

- 초보자의 접근이 쉽지만 신뢰성 있는 결과를 위해 많은 지식과 경험이 필요함
- 대형구조물의 경우 높은 Computing power가 요구됨

국내에서 사용되는 공학 해석프로그램

용도 및 분야	소프트웨어 명	주요 적용분야
경계요소법 (Boundary Element Method)	BEASY	열전도, 음향 및 정전기 분석
	COMET/ACOUSTIC	진동소음 음향분석
전산유체역학 (Computational Fluid Dynamics)	ADNA-F	유한요소 프로그램
	CFDesign TK	유체모델링 디자인
	FELDVIEW	복합유체역학
유한요소 해석솔버 (Finite Element Analysis Solver)	ABAQUS	선형/비선형 구조해석, 열전도 FEA
	ANSYS	선형/비선형분석, 구조적, 정적형, 동적형
	MSC/NASTRAN	구조 스트레스, 진동, 열전송 분석
	STAAD/ISDS	건축, 토목범용 구조해석 및 설계
	UAI/NASTRAN	역학요소와 시스템 스트레스, 진동,공기탄성 및 열특성 최적화
유한요소 모델러 (Finite Element Modeler)	FEMAP	유한요소 모델링 및 후처리 제품
	HYPERMESH	유한요소 전후처리 시스템
	MSC/PATRAN	개방형 유연 MCAE환경 및 통합제품
통합 FEA/FEM	ADAMS/FEA	FEA와 ADAMS간의 ㄷ이터 변환
	COMSON/M	일반복적 FEA, 전후처리, 통계, 역학, 열전도, 비선형 등
	MSC/FATIGUE	크랙초기화, 크랙 성장 및 전체과정
운동학/동역학관련 해석 (Kinematic/Dynamic Analysis)	ADAMS/SOLVER	역학 시뮬레이션
	ADAMS/TIRE	타이어와 도로 상호작용 모듈
	ADAMS/VEHCLE	차량 동역학 해석
	DADS	기계장치 및 역학 시뮬레이션
	WORKING MODEL	동역학 시뮬레이션
수학적 모델링	Mathemathica	수치 및 그래픽, 심볼형태로 그래픽적인 컴퓨테이션용

1	Overview	1-1
2	The Direct Stiffness Method: Breakdown	2-1
3	The Direct Stiffness Method: Assembly and Solution	3-1
4	The Direct Stiffness Method: Miscellaneous Topics	4-1
5	Analysis of Example Truss by a CAS	5-1
6	Constructing MOM Members	6-1
7	Finite Element Modeling: Introduction	7-1
8	Finite Element Modeling: Mesh, Loads, BCs	8-1
9	Multifreedom Constraints I	9-1
10	Multifreedom Constraints II	10-1
11	Superelements and Global-Local Analysis	11-1
12	The Bar Element	12-1
13	The Beam Element	13-1
14	The Plane Stress Problem	14-1
15	The Linear Triangle	15-1
16	The Isoparametric Representation	16-1
17	Isoparametric Quadrilaterals	17-1
18	Shape Function Magic	18-1
19	FEM Convergence requirements	19-1
20	(Moved to AFEM)	20-1
21	Implementation of One-Dimensional Elements	21-1
22	FEM Programs for Plane Trusses and Frames	22-1
23	Implementation of iso-P Quadrilateral Elements	23-1
24	Implementation of iso-P Triangular Elements	24-1
23	The Assembly Procedure	23-1
24	FE Model Definition	24-1
25	Solving FEM Equations	25-1
26	(under revision)	26-1
27	(under revision)	27-1
28	Stress Recovery	28-1

- **Part 1 : Finite Element Basic Concepts**

1 Overview 1-1
2 The Direct Stiffness Method: Breakdown 2-1
3 The Direct Stiffness Method: Assembly and Solution 3-1
4 The Direct Stiffness Method: Miscellaneous Topics 4-1

DSM Process

- **Part 2 : Mathematical Formulation of Finite Elements**

7 Finite Element Modeling: Introduction 7-1
8 Finite Element Modeling: Mesh, Loads, BCs 8-1
12 The Bar Element 12-1
13 The Beam Element 13-1
14 The Plane Stress Problem 14-1

Potential Theory, Geriken Methods, Shape Function, B-Matrix

- **Part 3 : Computer Implementation of Finite Elements Method**

15 The Linear Triangle 15-1
16 The Isoparametric Representation 16-1
17 Isoparametric Quadrilaterals 17-1

Numerical Integration, Jacobian

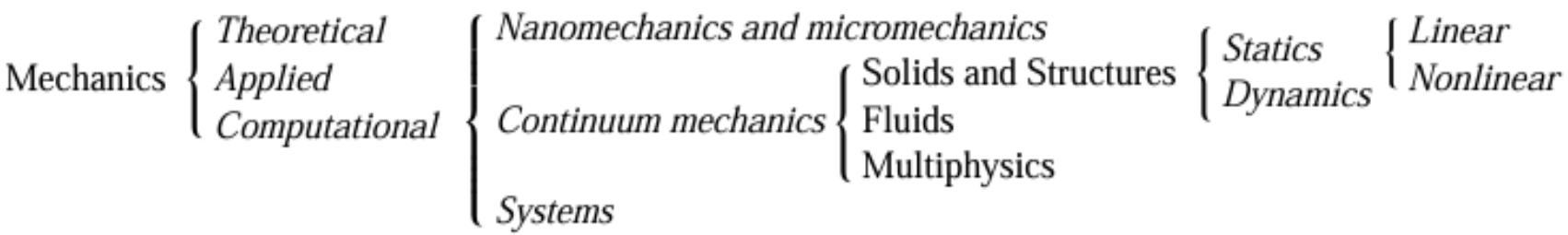
CH1. Overview

학습목표 : 유한요소법의 프로세스에 대해 학습한다.

- Where This Material Fits
- What does a Finite Element Look Like
- The FEM Analysis Process

§1.1. **WHERE THIS MATERIAL FITS** 1–3
§1.1.1. Computational Mechanics 1–3
§1.1.2. Statics vs. Dynamics 1–4
§1.1.3. Linear vs. Nonlinear 1–5
§1.1.4. Discretization methods 1–5
§1.1.5. FEM Variants 1–5
§1.2. **WHAT DOES A FINITE ELEMENT LOOK LIKE?** 1–6
§1.3. **THE FEM ANALYSIS PROCESS** 1–7
§1.3.1. The Mathematical FEM 1–8
§1.3.2. The Physical FEM 1–9
§1.3.3. Synergy of Physical and Mathematical FEM 1–9
§1.4. **INTERPRETATIONS OF THE FINITE ELEMENT METHOD** 1–11
§1.4.1. Physical Interpretation 1–11
§1.4.2. Mathematical Interpretation 1–12
§1.5. **KEEPING THE COURSE** 1–13
§1.6. ***WHAT IS NOT COVERED** 1–13

1. Where this material fits



- ✓ 이론역학은 본질적인 과학적 가치를 위해 연구된 역학의 기본 법칙과 원리를 다룬다.
- ✓ 응용역학은 이러한 이론적 지식을 과학 및 공학 응용, 특히 물리적 현상의 수학적 모델 구축과 관련하여 적용.
- ✓ **전산역학은 디지털 컴퓨터에 구현된 수치적 방법을 통해 시뮬레이션을 통해 특정 문제를 해결합니다.**

- ✓ 나노역학은 물질의 분자 및 원자 수준에서의 현상을 다룬다. 즉, 입자물리학 및 화학과 밀접하게 연관.
- ✓ Micromechanics는 주로 물질의 결정학 및 입자 수준을 연구한다. 주요 기술 응용 분야는 재료 및 마이크로 장치의 설계 및 제조와 관련된 분야
- ✓ **연속체 역학은 미세 구조가 현상학적 평균에 의해 균질화되는 연속체 모델을 사용하여 거시적 수준에서 Body를 연구. 전통적인 응용 분야는 고체 역학과 유체 역학.**

- ✓ 선형 정적 분석은 원인과 결과 측면에서 응답이 선형인 정적 문제를 다룬다. 예를 들어, 적용된 힘이 두 배가 되면 변위와 내부 응력도 두 배가 되는 현상.
- ✓ 이 영역 외부의 문제는 비선형으로 분류.

2. What does a finite element look like?

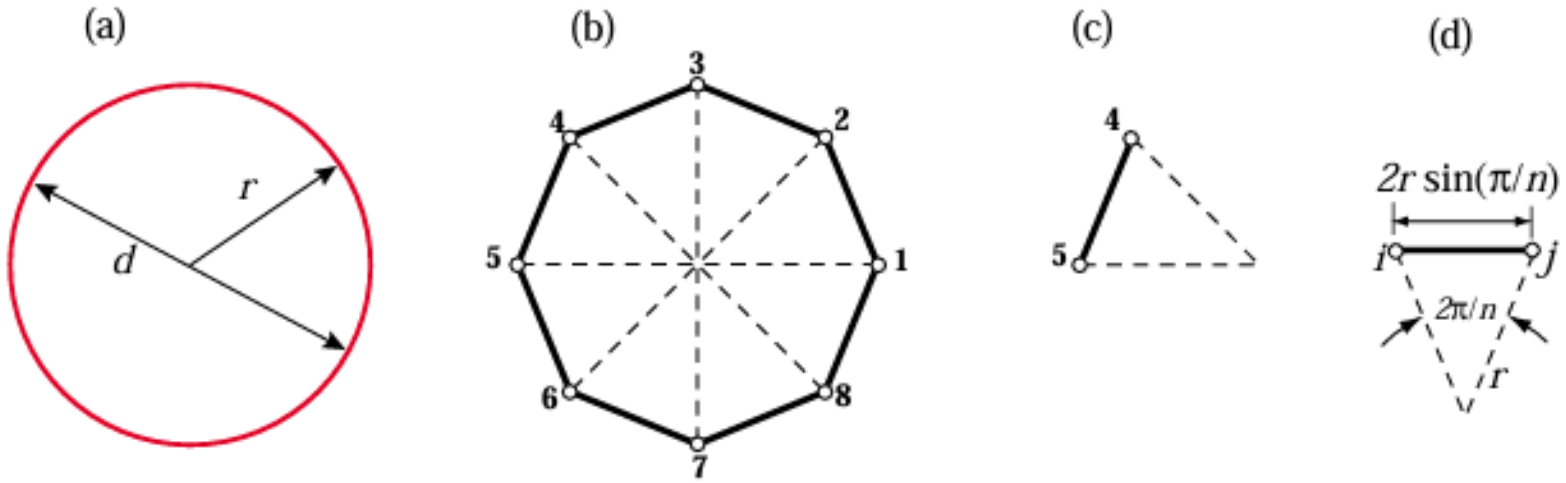
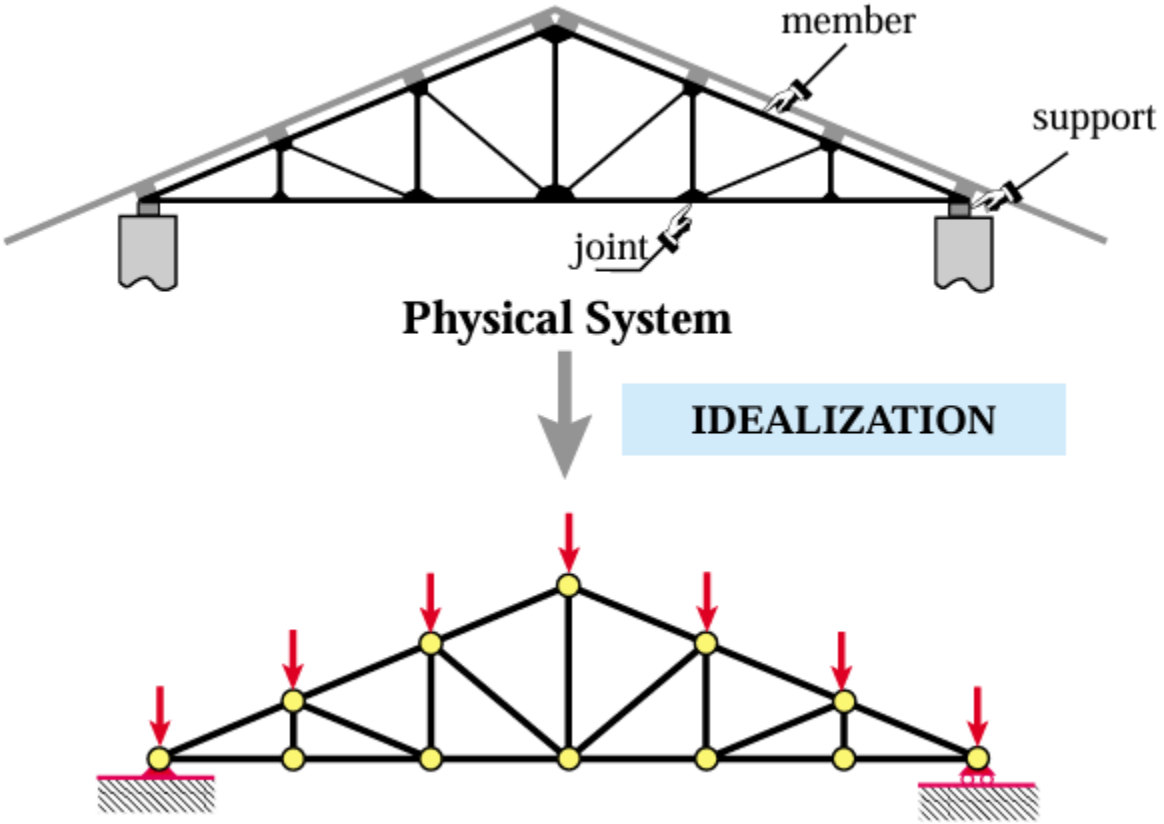


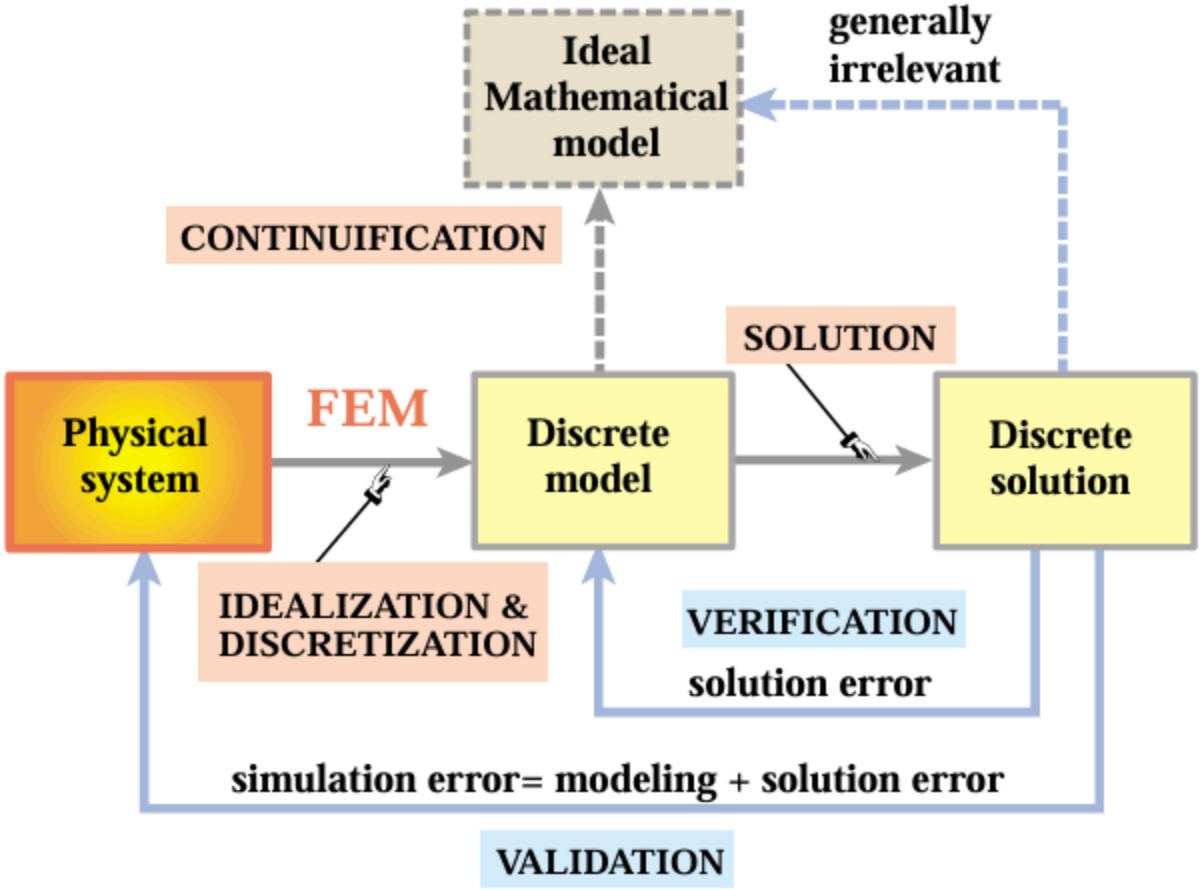
Figure 1.1. The "find π" problem treated with FEM concepts: (a) continuum object, (b) a discrete approximation (inscribed regular polygon), (c) disconnected element, (d), generic element.

n	$\pi_n = n\sin(\pi/n)$	Extrapolated by Wynn-ϵ	Exact π to 16 places
1	0.000000000000000		
2	2.000000000000000		
4	2.828427124746190	3.414213562373096	
8	3.061467458920718		
16	3.121445152258052	3.141418327933211	
32	3.136548490545939		
64	3.140331156954753	3.141592658918053	
128	3.141277250932773		
256	3.141513801144301	3.141592653589786	3.141592653589793

3. The FEM analysis process

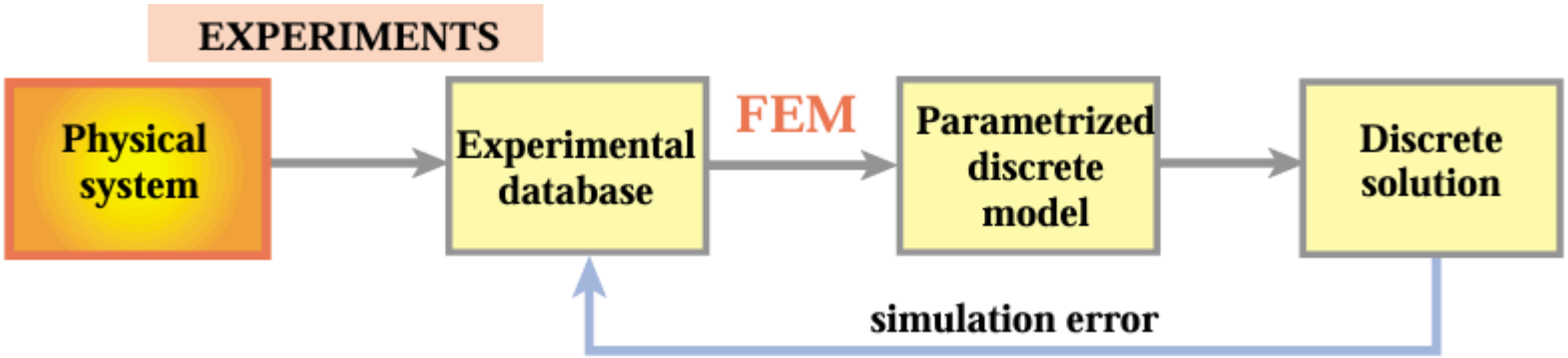


The idealization process for a simple structure.
The physical system, here a roof truss, is directly idealized by the mathematical model: a pin-jointed bar assembly. For this particular structure, the idealization coalesces with the discrete model.



The Physical FEM. The physical system (left) is the source of the simulation process. The ideal mathematical model (should one go to the trouble of constructing it) is inessential.

- Model updating process in the Physical FEM



CH2. The Direct Stiffness Method(DSM) : Breakdown

◆ 학습목표 : 트러스 구조물을 대상으로 직접강성법에 대해 이해한다.

- Truss Structures & Idealization
- The Master Stiffness Equations
- Breakdown
- Example

§2.1. **WHY A PLANE TRUSS?** 2–3
§2.2. **TRUSS STRUCTURES** 2–3
§2.3. **IDEALIZATION** 2–5
§2.4. **JOINT FORCES AND DISPLACEMENTS** 2–5
§2.5. **THE MASTER STIFFNESS EQUATIONS** 2–7
§2.6. **BREAKDOWN** 2–8
§2.6.1. Disconnection 2–8
§2.6.2. Localization 2–8
§2.6.3. Computation of Member Stiffness Equations 2–8

The Direct Stiffness Method(DSM) Steps Starting with : Idealization

Breakdown (Chapter 2)
- **Disconnection**
- **Localization**
- **Member(Element) Formation**

Assembly & Solution (Chapter 3)
- **Globalizatioin**
- **Merge**
- **Application of BCs**
- **Solution**
- **Recovery of Derived Quantities**

2. Truss Structure

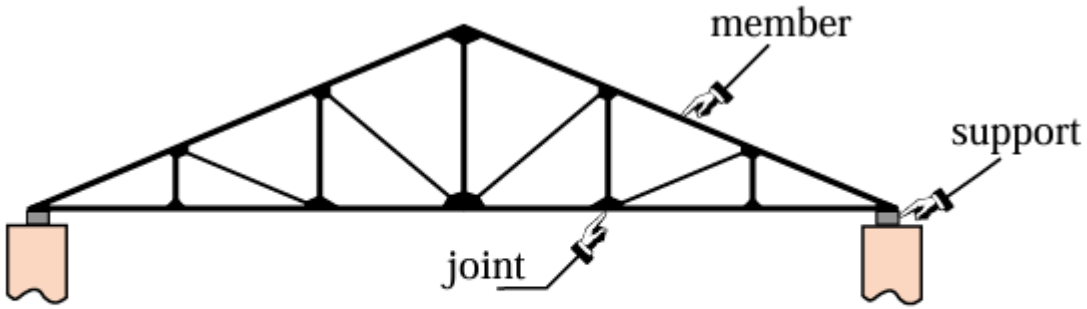


Figure 2.2. An actual plane truss structure. That shown is typical of a roof truss used in residential building construction.

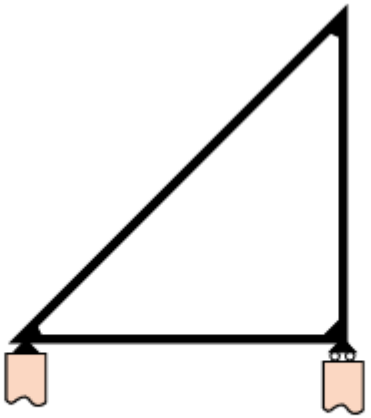


Figure 2.3. The example plane truss structure, called "example truss" in the sequel. It has three members and three joints.

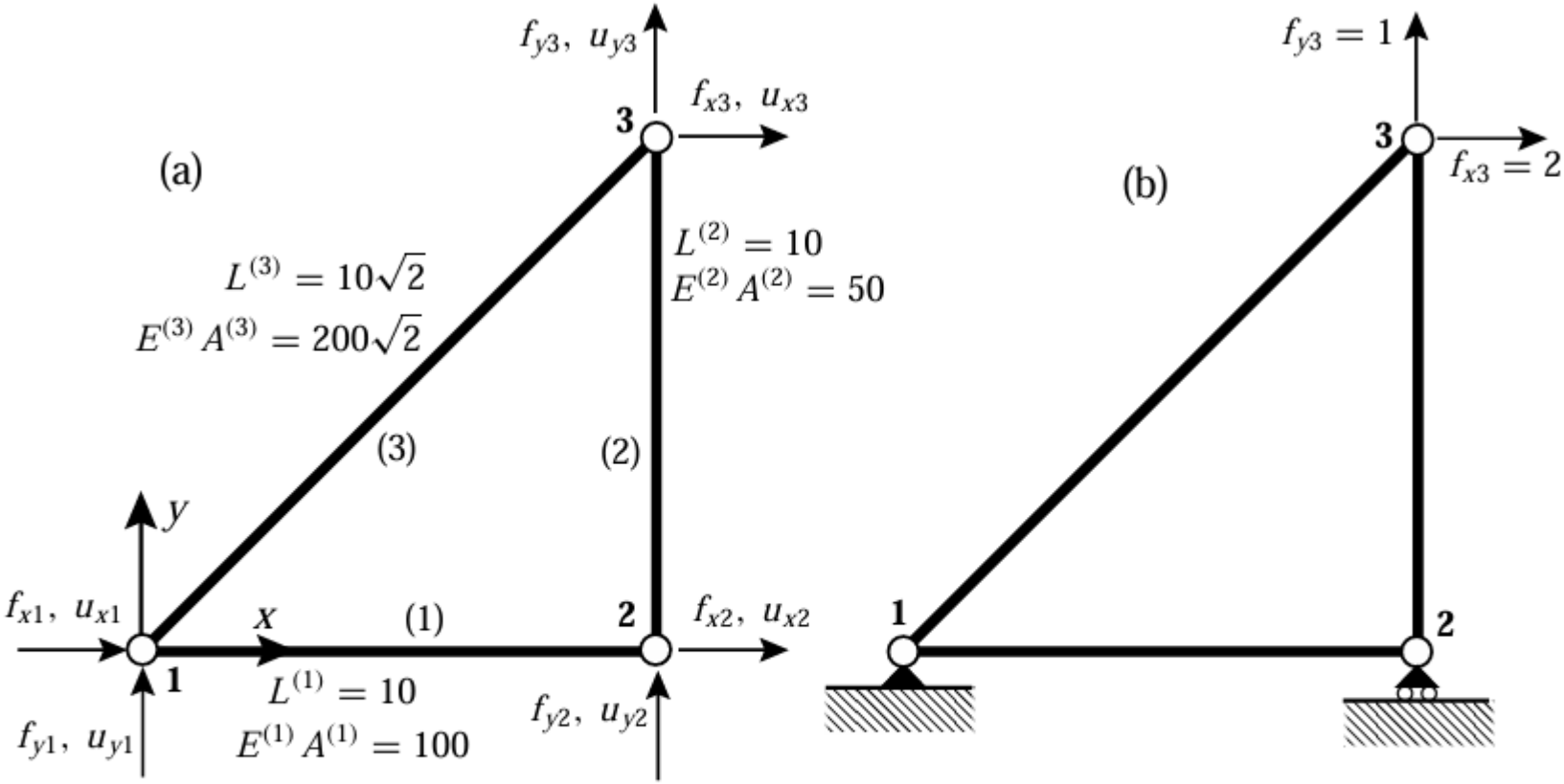
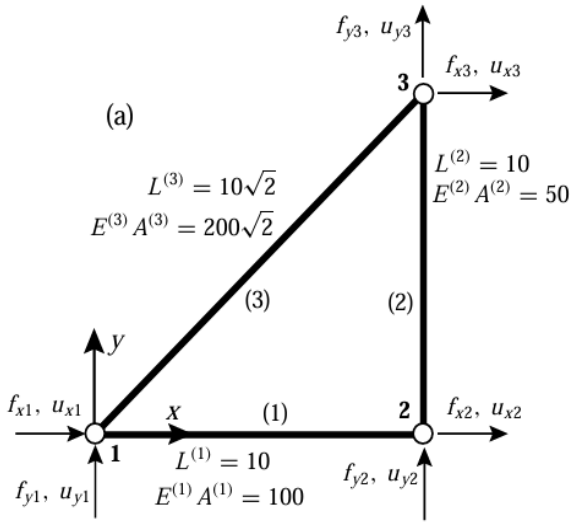


Figure 2.4. Pin-jointed idealization of example truss: (a) geometric and elastic properties, (b) support conditions and applied loads.

4. Joint force, Displacement, Master Stiffness

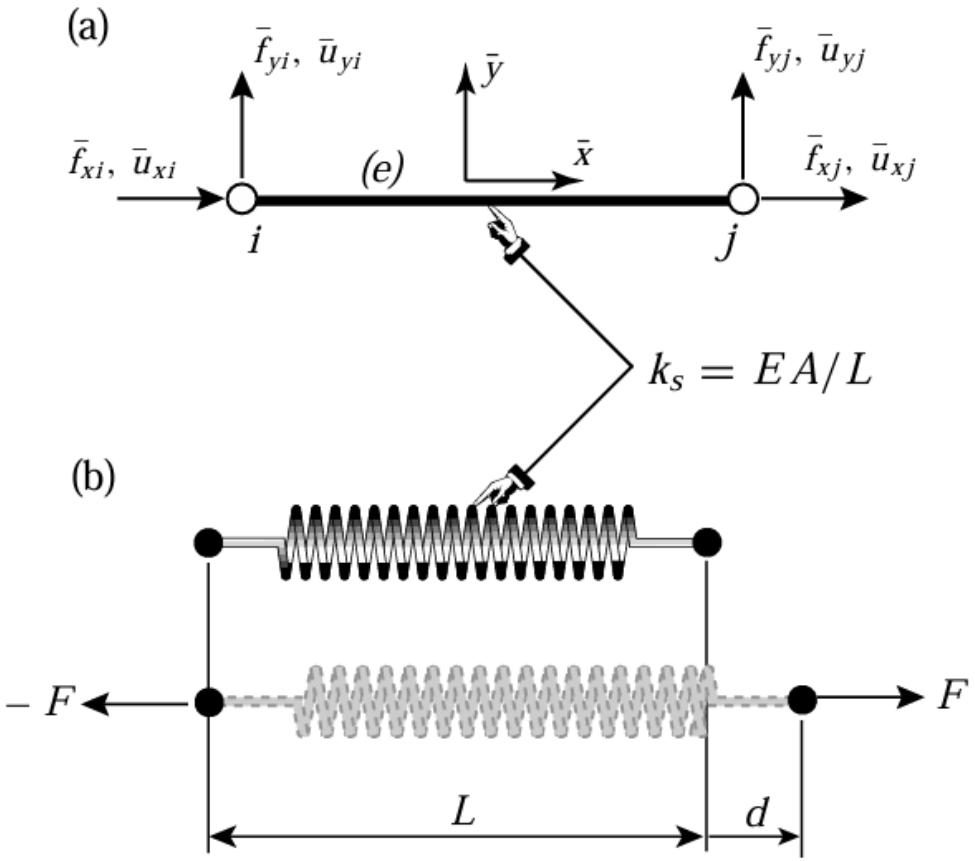


$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{x1x1} & K_{x1y1} & K_{x1x2} & K_{x1y2} & K_{x1x3} & K_{x1y3} \\ K_{y1x1} & K_{y1y1} & K_{y1x2} & K_{y1y2} & K_{y1x3} & K_{y1y3} \\ K_{x2x1} & K_{x2y1} & K_{x2x2} & K_{x2y2} & K_{x2x3} & K_{x2y3} \\ K_{y2x1} & K_{y2y1} & K_{y2x2} & K_{y2y2} & K_{y2x3} & K_{y2y3} \\ K_{x3x1} & K_{x3y1} & K_{x3x2} & K_{x3y2} & K_{x3x3} & K_{x3y3} \\ K_{y3x1} & K_{y3y1} & K_{y3x2} & K_{y3y2} & K_{y3x3} & K_{y3y3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{bmatrix}$$

In matrix notation:

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{u}.$$

5. Breakdown : Disconnection → Localization →Computation of Member Stiffness Equation



$$\bar{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{K}}\,\bar{\mathbf{u}},$$

$$\begin{bmatrix} \bar{f}_{xi} \\ \bar{f}_{yi} \\ \bar{f}_{xj} \\ \bar{f}_{yj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{xixi} & \bar{K}_{xiyi} & \bar{K}_{xixj} & \bar{K}_{xiyj} \\ \bar{K}_{yixi} & \bar{K}_{yiyi} & \bar{K}_{yixj} & \bar{K}_{yiyj} \\ \bar{K}_{xjxi} & \bar{K}_{xjyi} & \bar{K}_{xjxj} & \bar{K}_{xjyj} \\ \bar{K}_{yjxi} & \bar{K}_{yjyi} & \bar{K}_{yjxj} & \bar{K}_{yjyj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{xi} \\ \bar{u}_{yi} \\ \bar{u}_{xj} \\ \bar{u}_{yj} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \bar{f}_{xi} \\ \bar{f}_{yi} \\ \bar{f}_{xj} \\ \bar{f}_{yj} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{xi} \\ \bar{u}_{yi} \\ \bar{u}_{xj} \\ \bar{u}_{yj} \end{bmatrix} = \overline{\mathbf{K}}\,\bar{\mathbf{u}},$$

$$\overline{\mathbf{K}} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

CH3. The Direct Stiffness Method(DSM) Assembly and Solution

◆ 학습목표 : 트러스 구조물을 대상으로 직접강성법에 대해 이해한다.

- Coordinate Transformation Matrix
- Globalization
- Application of Boundary conditions
- Example

§2.1. **WHY A PLANE TRUSS?** 2–3

§2.2. **TRUSS STRUCTURES** 2–3

§2.3. **IDEALIZATION** 2–5

§2.4. **JOINT FORCES AND DISPLACEMENTS** 2–5

§2.5. **THE MASTER STIFFNESS EQUATIONS** 2–7

§2.6. **BREAKDOWN** 2–8

§2.6.1. Disconnection 2–8

§2.6.2. Localization 2–8

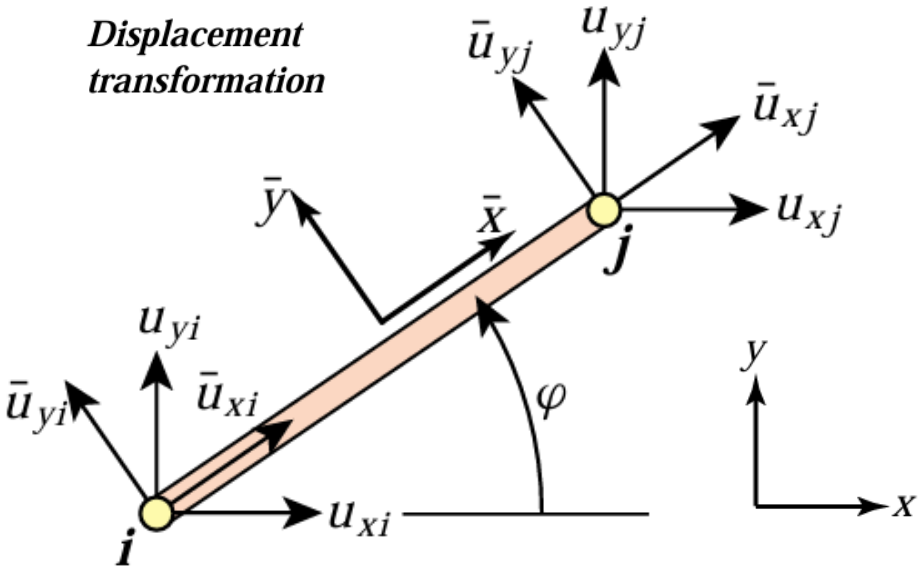
§2.6.3. Computation of Member Stiffness Equations 2–8

Breakdown (Chapter 2)
- Disconnection
- Localization
- Member(Element) Formation

Assembly & Solution (Chapter 3)
- **Globalizatioin**
- **Merge**
- **Application of BCs**
- **Solution**
- **Recovery of Derived Quantities**

2. Assembly

1) Coordinate Transformations

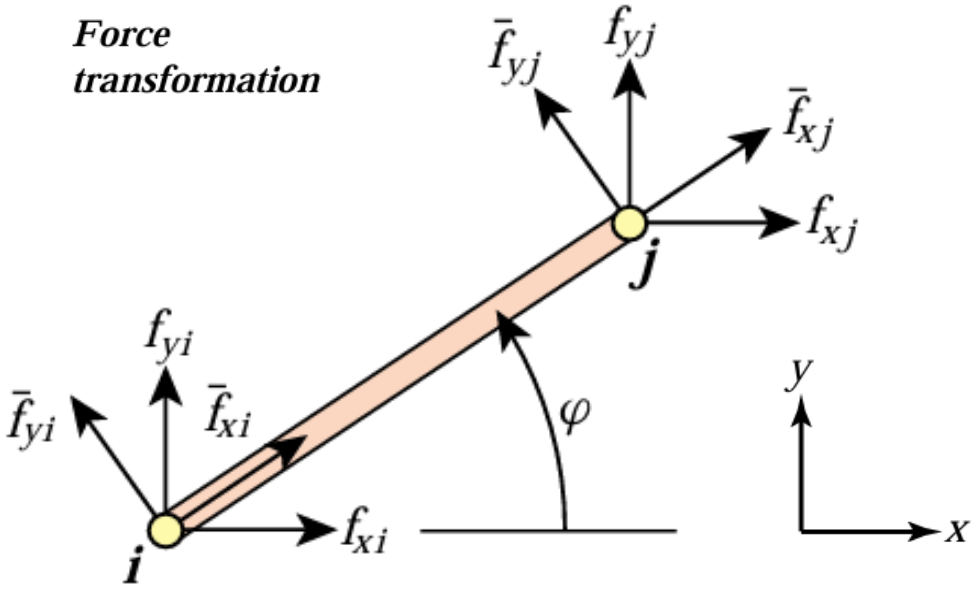


$$\bar{u}_{xi} = u_{xi}c + u_{yi}s, \qquad \bar{u}_{yi} = -u_{xi}s + u_{yi}c,$$
$$\bar{u}_{xj} = u_{xj}c + u_{yj}s, \qquad \bar{u}_{yj} = -u_{xj}s + u_{yj}c,$$

where $c = \cos\varphi$, $s = \sin\varphi$ and φ is the angle

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{xi} \\ \bar{u}_{yi} \\ \bar{u}_{xj} \\ \bar{u}_{yj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ u_{xj} \\ u_{yj} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{u}}^{(e)} = \mathbf{T}^{(e)}\mathbf{u}^{(e)}$$



$$\begin{bmatrix} f_{xi} \\ f_{yi} \\ f_{xj} \\ f_{yj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{f}_{xi} \\ \bar{f}_{yi} \\ \bar{f}_{xj} \\ \bar{f}_{yj} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}^{(e)} = (\mathbf{T}^{(e)})^T \bar{\mathbf{f}}^{(e)}$$

변환행렬의 특징은 역행렬과 전치가 동일함

2) Globalization

$$\mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{K}^{(e)}\mathbf{u}^{(e)}$$

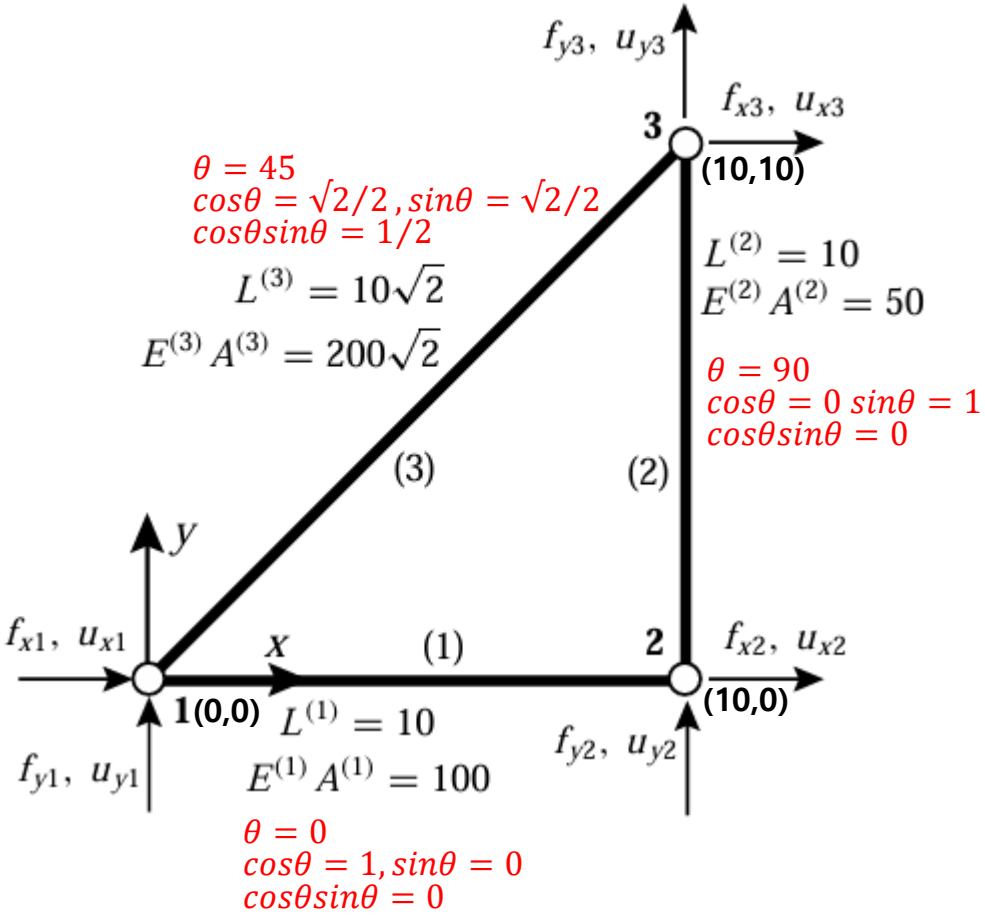
$$\bar{\mathbf{u}}^{(e)} = \mathbf{T}^{(e)}\mathbf{u}^{(e)}, \qquad \mathbf{f}^{(e)} = (\mathbf{T}^{(e)})^T \bar{\mathbf{f}}^{(e)}.$$

$$\mathbf{K}^{(e)} = (\mathbf{T}^{(e)})^T \bar{\mathbf{K}}^{(e)} \mathbf{T}^{(e)}.$$

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{E^{(e)} A^{(e)}}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix}$$

3. Solution & post process

Example 3-1)



We Obtain the Globalized Element Stiffness Equations of the Example Truss.

For member (1)

$$\begin{bmatrix} f_{x1}^{(1)} \\ f_{y1}^{(1)} \\ f_{x2}^{(1)} \\ f_{y2}^{(1)} \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1}^{(1)} \\ u_{y1}^{(1)} \\ u_{x2}^{(1)} \\ u_{y2}^{(1)} \end{bmatrix}$$

For member (2)

$$\begin{bmatrix} f_{x2}^{(2)} \\ f_{y2}^{(2)} \\ f_{x3}^{(2)} \\ f_{y3}^{(2)} \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x2}^{(2)} \\ u_{y2}^{(2)} \\ u_{x3}^{(2)} \\ u_{y3}^{(2)} \end{bmatrix}$$

For member (3)

$$\begin{bmatrix} f_{x1}^{(3)} \\ f_{y1}^{(3)} \\ f_{x3}^{(3)} \\ f_{y3}^{(3)} \end{bmatrix} = 20 \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1}^{(3)} \\ u_{y1}^{(3)} \\ u_{x3}^{(3)} \\ u_{y3}^{(3)} \end{bmatrix}$$

Expanded Element Stiffness Equations of Example Truss.

For member (1)

$$\begin{bmatrix} f_{x1}^{(1)} \\ f_{y1}^{(1)} \\ f_{x2}^{(1)} \\ f_{y2}^{(1)} \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1}^{(1)} \\ u_{y1}^{(1)} \\ u_{x2}^{(1)} \\ u_{y2}^{(1)} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} f_{x1}^{(1)} \\ f_{y1}^{(1)} \\ f_{x2}^{(1)} \\ f_{y2}^{(1)} \\ f_{x3}^{(1)} \\ f_{y3}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1}^{(1)} \\ u_{y1}^{(1)} \\ u_{x2}^{(1)} \\ u_{y2}^{(1)} \\ u_{x3}^{(1)} \\ u_{y3}^{(1)} \end{bmatrix}$$

For member (2)

$$\begin{bmatrix} f_{x2}^{(2)} \\ f_{y2}^{(2)} \\ f_{x3}^{(2)} \\ f_{y3}^{(2)} \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x2}^{(2)} \\ u_{y2}^{(2)} \\ u_{x3}^{(2)} \\ u_{y3}^{(2)} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} f_{x1}^{(2)} \\ f_{y1}^{(2)} \\ f_{x2}^{(2)} \\ f_{y2}^{(2)} \\ f_{x3}^{(2)} \\ f_{y3}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1}^{(2)} \\ u_{y1}^{(2)} \\ u_{x2}^{(2)} \\ u_{y2}^{(2)} \\ u_{x3}^{(2)} \\ u_{y3}^{(2)} \end{bmatrix}$$

For member (3)

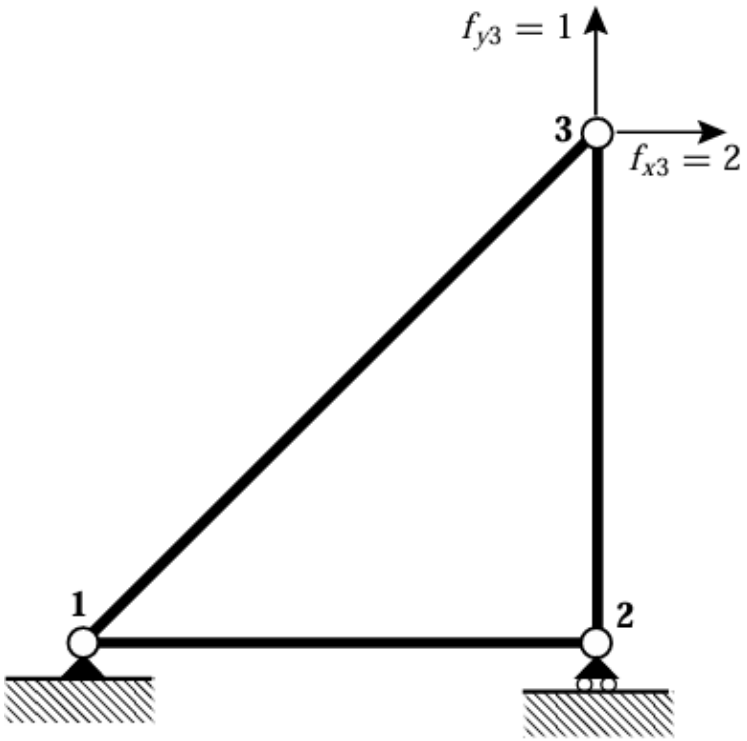
$$\begin{bmatrix} f_{x1}^{(3)} \\ f_{y1}^{(3)} \\ f_{x3}^{(3)} \\ f_{y3}^{(3)} \end{bmatrix} = 20 \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1}^{(3)} \\ u_{y1}^{(3)} \\ u_{x3}^{(3)} \\ u_{y3}^{(3)} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} f_{x1}^{(3)} \\ f_{y1}^{(3)} \\ f_{x2}^{(3)} \\ f_{y2}^{(3)} \\ f_{x3}^{(3)} \\ f_{y3}^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 0 & 0 & -10 & -10 \\ 10 & 10 & 0 & 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & -10 & 0 & 0 & 10 & 10 \\ -10 & -10 & 0 & 0 & 10 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1}^{(3)} \\ u_{y1}^{(3)} \\ u_{x2}^{(3)} \\ u_{y2}^{(3)} \\ u_{x3}^{(3)} \\ u_{y3}^{(3)} \end{bmatrix}$$

Forming the Master Stiffness Equations through Equilibrium Rule.

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(1)} + \mathbf{f}^{(2)} + \mathbf{f}^{(3)} = \left(\mathbf{K}^{(1)} + \mathbf{K}^{(2)} + \mathbf{K}^{(3)}\right)\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{u}$$

$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 10 & -10 & 0 & -10 & -10 \\ 10 & 10 & 0 & 0 & -10 & -10 \\ -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ -10 & -10 & 0 & 0 & 10 & 10 \\ -10 & -10 & 0 & -5 & 10 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{bmatrix}$$

Applying support and Loading Boundary Conditions.



- Displacement BCs :

$$u_{x1} = u_{y1} = u_{y2} = 0,$$

- Force BCs :

$$f_{x2} = 0, \quad f_{x3} = 2, \quad f_{y3} = 1.$$

Solving : Reduced Master Stiffness Equations for Hand Computation.

$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ 0 \\ f_{y2} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 10 & -10 & 0 & -10 & -10 \\ 10 & 10 & 0 & 0 & -10 & -10 \\ -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ -10 & -10 & 0 & 0 & 10 & 10 \\ -10 & -10 & 0 & -5 & 10 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{x2} \\ 0 \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{bmatrix}$$

- Displacement BCs :

$$u_{x1} = u_{y1} = u_{y2} = 0,$$

- Force BCs :

$$f_{x2} = 0, \quad f_{x3} = 2, \quad f_{y3} = 1.$$

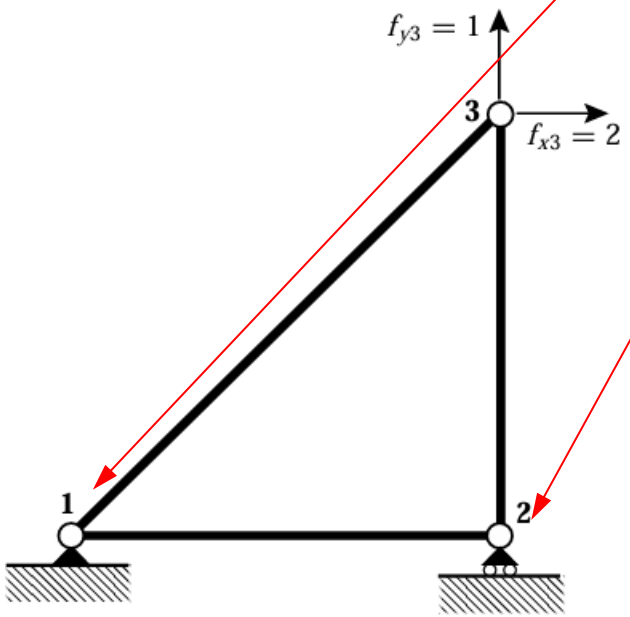
$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 10 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{x2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_{x2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4 \\ -0.2 \end{bmatrix}$$

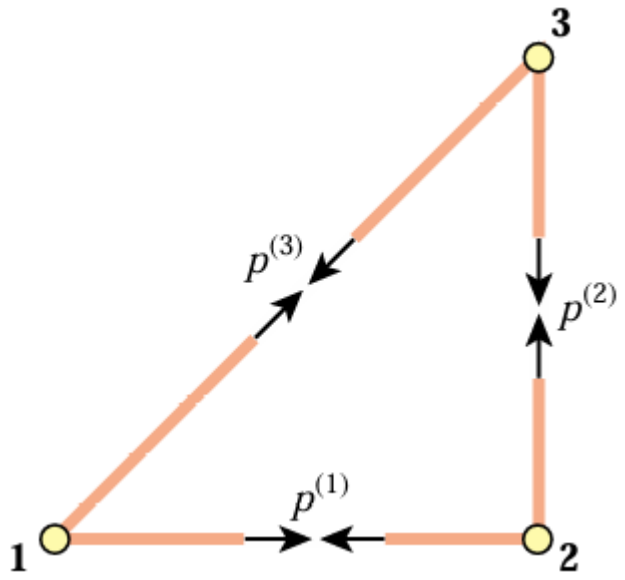
$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.4 \\ -0.2 \end{bmatrix}$$

Postprocessing : Recovery of reaction Forces, Recovery of Internal Forces and Stresses

$$\mathbf{f} = \mathbf{Ku} = \begin{bmatrix} 20 & 10 & -10 & 0 & -10 & -10 \\ 10 & 10 & 0 & 0 & -10 & -10 \\ -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ -10 & -10 & 0 & 0 & 10 & 10 \\ -10 & -10 & 0 & -5 & 10 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.4 \\ -0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Recovery of Internal Forces(Axial Forces in Truss Members)



For each member(element)

1. Extract $\mathbf{u}^{(e)}$ from $\mathbf{u}$

2. Transform to local displacements

$$\bar{\mathbf{u}}^{(e)} = \mathbf{T}^{(e)}\mathbf{u}^{(e)}$$

3. Compute elongation $d^{(e)} = \bar{u}_{xj}^{(e)} - \bar{u}_{xi}^{(e)}$

4. Compute axial force $p^{(e)} = \dfrac{E^{(e)}A^{(e)}}{L^{(e)}} d^{(e)}$

CH7. FEM Modeling : Introduction

◆ 학습목표 : 유한요소 모델링의 기본적인 방법에 대해 학습한다.

- FEM Terminology
- Discretization
- The Finite Element Method
- Case study

§7.1. **FEM TERMINOLOGY** 7–3

§7.2. **IDEALIZATION** 7–4
- §7.2.1. Models . . . 7–4
- §7.2.2. Mathematical Models . . . 7–5
- §7.2.3. Implicit vs. Explicit Modeling . . . 7–6

§7.3. **DISCRETIZATION** 7–7
- §7.3.1. Purpose . . . 7–7
- §7.3.2. Error Sources and Approximation . . . 7–8
- §7.3.3. Other Discretization Methods . . . 7–8

§7.4. **THE FINITE ELEMENT METHOD** 7–8
- §7.4.1. Interpretation . . . 7–8
- §7.4.2. Element Attributes . . . 7–9

§7.5. **CLASSIFICATION OF MECHANICAL ELEMENTS** 7–11
- §7.5.1. Primitive Structural Elements . . . 7–11
- §7.5.2. Continuum Elements . . . 7–11
- §7.5.3. Special Elements . . . 7–11
- §7.5.4. Macroelements . . . 7–12
- §7.5.5. Substructures . . . 7–12

§7.6. **ASSEMBLY** 7–12

§7.7. **BOUNDARY CONDITIONS** 7–12
- §7.7.1. Essential and Natural B.C. . . . 7–13
- §7.7.2. Boundary Conditions in Structural Problems . . . 7–13

1. FEM Terminology

- u 라는 열벡터는 DOF벡터 또는 상태벡터라고 불리며 역학적 응용에 사용된다.
- 트러스 문제에서와 마찬가지로 u와 f 사이는 선형적이고 균질한 가정이 적용된다.

Master(Global) Stiffness Equations

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{bmatrix}$$

Linear structure :

$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{x1x1} & K_{x1y1} & K_{x1x2} & K_{x1y2} & K_{x1x3} & K_{x1y3} \\ K_{y1x1} & K_{y1y1} & K_{y1x2} & K_{y1y2} & K_{y1x3} & K_{y1y3} \\ K_{x2x1} & K_{x2y1} & K_{x2x2} & K_{x2y2} & K_{x2x3} & K_{x2y3} \\ K_{y2x1} & K_{y2y1} & K_{y2x2} & K_{y2y2} & K_{y2x3} & K_{y2y3} \\ K_{x3x1} & K_{x3y1} & K_{x3x2} & K_{x3y2} & K_{x3x3} & K_{x3y3} \\ K_{y3x1} & K_{y3y1} & K_{y3x2} & K_{y3y2} & K_{y3x3} & K_{y3y3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{bmatrix}$$

Nodal force — **Master stiffness matrix** — **Nodal displacements**

$$\mathbf{f = K\,u}$$

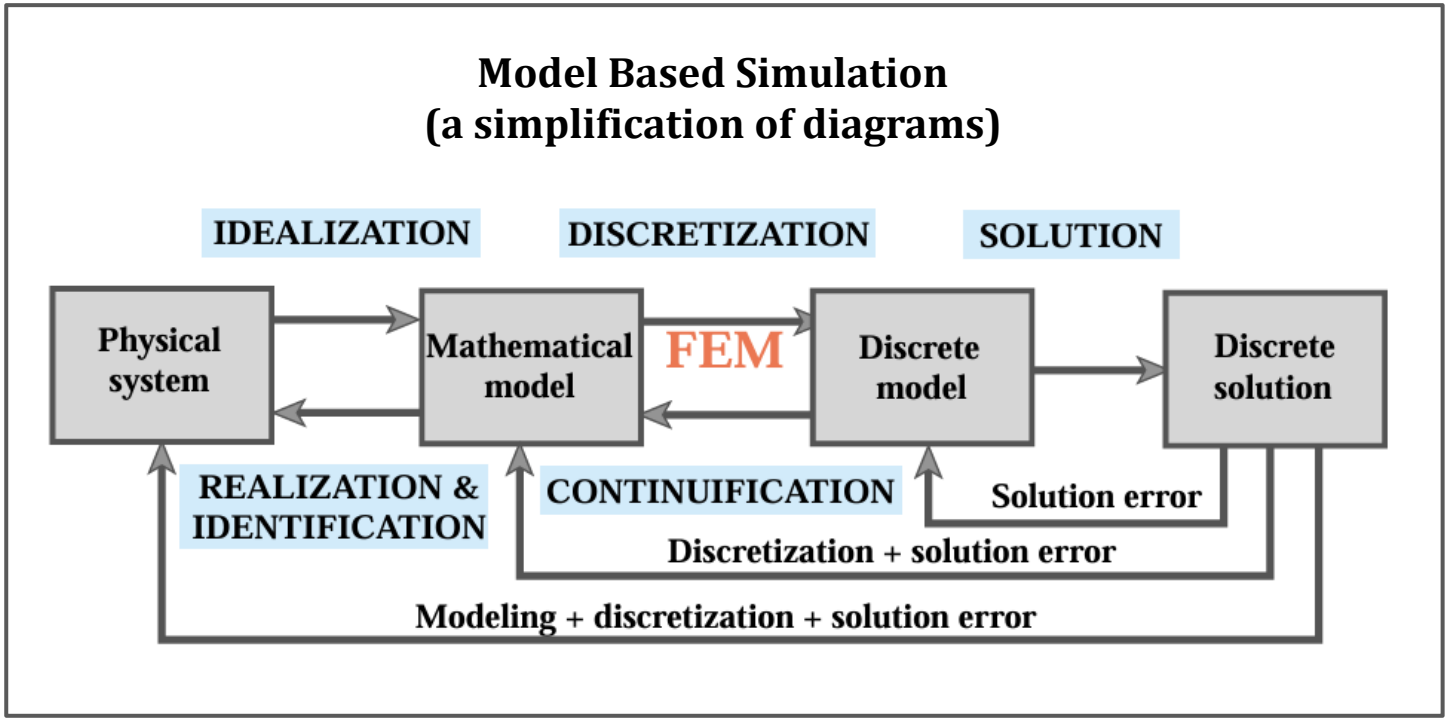
- 본 과정에서는 구조해석을 하지만 FEM은 기본적으로 열전달이나 음향해석등 다양한 물리현상을 다룬다
- FEM은 편미분식을 선형대수 방정식으로 변화하여 이산화 후 계산하는 원리이므로 미분방정식이 지배하는 다양한 물리현상에 적용가능
- State vector는 Key variable이라고 하는 변수인데 이 변수를 알면 관련된 물리 값을 알 수 있다
  → 구조문제의 경우 예시
- 구조문제 이외의 경우 state vector가 정의되는 물리현상은 다음과 같다

Physical Significance of Vectors u and f in Miscellaneous FEM Applications

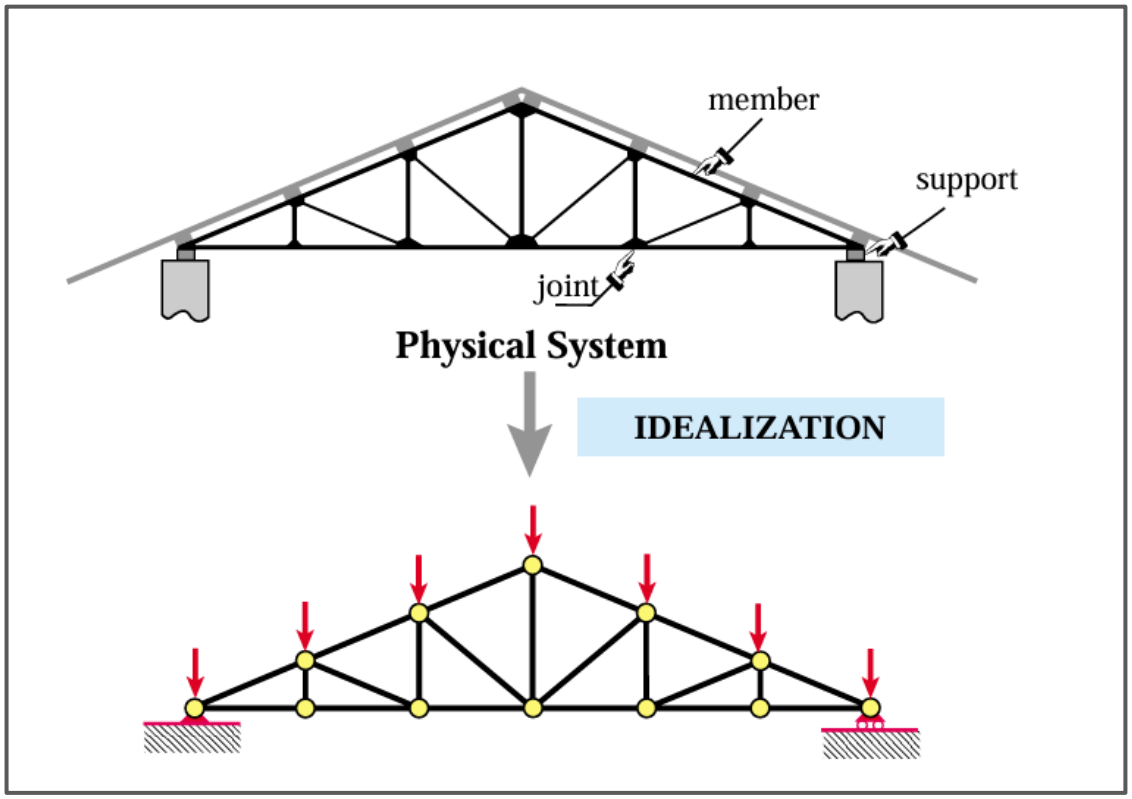
Application Problem	*State (DOF) vector* **u** *represents*	*Conjugate vector* **f** *represents*
Structures and solid mechanics	Displacement	Mechanical force
Heat conduction	Temperature	Heat flux
Acoustic fluid	Displacement potential	Particle velocity
Potential flows	Pressure	Particle velocity
General flows	Velocity	Fluxes
Electrostatics	Electric potential	Charge density
Magnetostatics	Magnetic potential	Magnetic intensity

2. Idealization

- 실제 물리시스템을 수학적 모델로 이상화 시키고 FEM과정을 통해 이산화 한 후 해를 구하는 과정
- Process를 통해서 구해진 해가 실제 관심 있는 해와 같은지 검증이 필요함(VMV)
- Solution error는 수치적분 시 발생되는 수치에러
- Discretization error는 이산화 시 요소의 선택과 적용과 관련된 에러
- Modeling error는 물리계를 수학모델로 등가시 키면서 발생된 에러로써 경계조건, 고차항, 마찰 등이 해당함



- 현상을 단순하게 모델링



- The idealization process for a simple structure.
- The physical system, here a roof truss, is directly idealized by the mathematical model: a pin-jointed bar assembly.
- For this particular structure, the idealization coalesces with the discrete model.

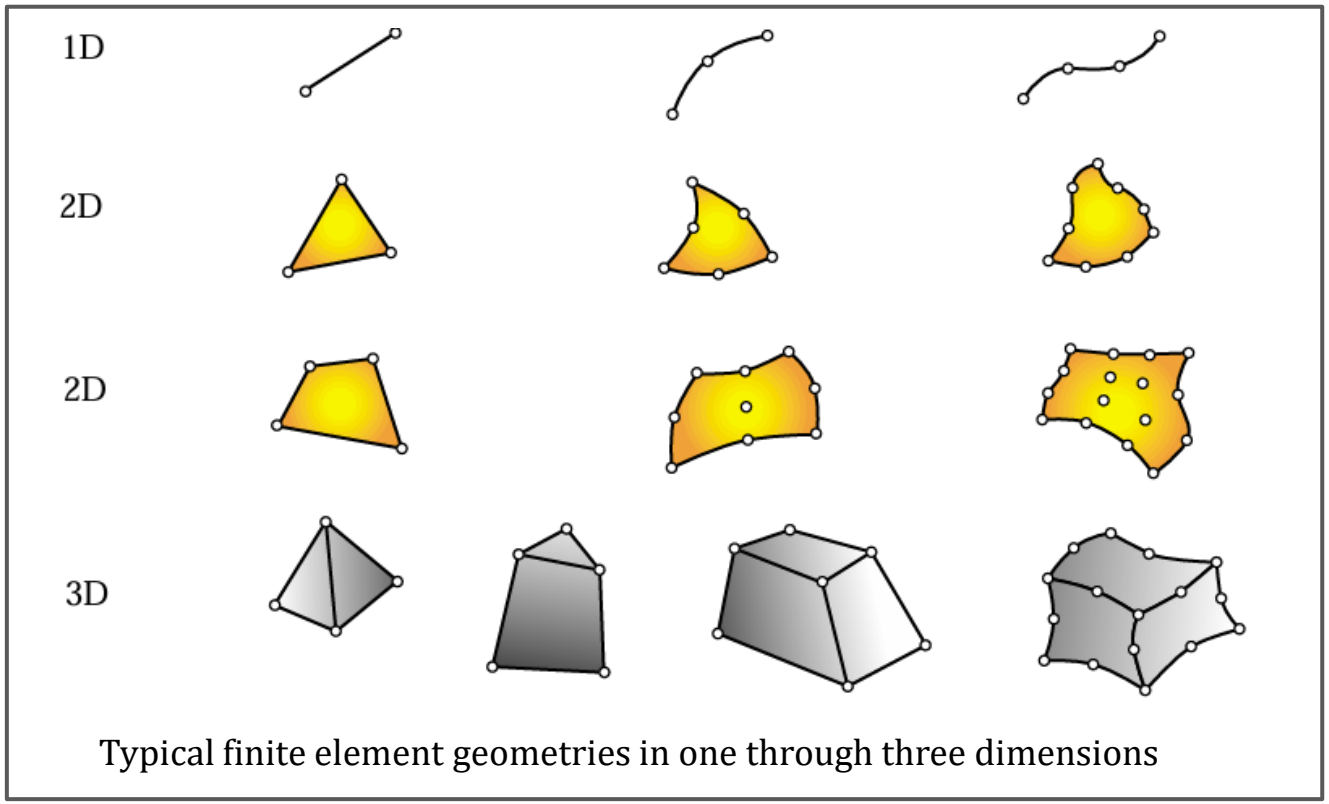
- 일반적으로 산업계에서 범용 유한요소 프로그램을 "블랙박스" 형태로 많이 사용하고 있음
- 이는 다양한 요소들을 제공하고 선택한 요소에 따른 수학모델을 구성해줌(Implicit Modeling방법)
- 요소의 선택 등 의미를 이해해야 하지만 그렇지 못한 경우가 대다수 이므로 "유한요소 문해력(literacy)"을 제공하는 것이 목적 임

Implicit Modeling	VS	Explicit Modeling
상용프로그램을 사용하며 프로그램에서 특정요소를 선택 ↓ 선택한 요소가 기반이 되는 수학적 모델이 자동으로 적용됨		사용자가 스스로 물리적 문제의 수학적 모델을 작성 ↓ 작성된 모델을 Solving하여 Solution을 얻음

- **Implicit Modeling보다 Explicit Modeling이 훨씬 더 많은 기술적 전문지식과 리소스, 경험이 필요 함**
- **일반적이지 않는 특별한 경우의 문제는 Explicit Modeling을 해야 함**

4. The Finite Element Method

- 정해진 차원이 없고 사용자가 선택하고 환산하여 적용한다.
- 전체시스템을 각각의 요소로 나누어서 계산하는데 그 기본요소가 어떻게 되어있는지 알아본다.
- 한쪽방향으로만 변형이 발생되는 1차원 문제가 있을 수 있고 평판과 같은 2차원 문제일수도 있다.
  → 2차원의 경우 삼각형이나 사각형으로 나눌 수 있다
- 또한 같은 2차원의 문제에서 노드의 개수가 다른 경우가 있는데 노드 개수에 따라 변화되는 차이점에 대해서 알아본다.
- 3차원 문제의 경우 3차원 요소를 사용한다.



Typical finite element geometries in one through three dimensions

Attributes of Mechanical Finite Elements

Nodal points.
각 요소에는 절점(node)이라고 불리는 일련의 구별되는 점들이 있다. **노드는 요소 형상 정의와 자유도 표현이라는 두 가지 목적으로 사용된다**. 그림과 같이 일반적으로 요소의 모서리나 끝점에 위치한다. 소위 refined된 요소 또는 고차 요소 노드는 요소의 내부뿐만 아니라 측면이나 면에도 배치된다.

Geometry.
요소의 형상은 절점 배치에 따라 정의된다. 실제로 사용되는 대부분의 요소는 상당히 단순한 기하학적 구조를 가지고 있다. 1차원에서 요소는 일반적으로 직선 또는 곡선 세그먼트이고 2차원에서는 삼각형 또는 사각형 모양이다. 3차원에서는 세 가지 일반적인 모양을 가지는데 사면체, 오면체(쐐기형 또는 프리즘이라고도 함) 및 육면체(직육면체 또는 "벽돌"이라고도 함)이다.

Degrees of freedom.
자유도(DOF)는 요소의 상태를 지정합니다. 또한 인접한 요소를 연결하는 역할도 한다. DOF는 절점에서**values (and possibly derivatives) of a primary field variable**로 정의된다

Nodal forces.
자유도와 일대일 대응에 있어서 항상 일련의 "절점 힘"이 있다. mechanical elements에서의 대응은 에너지를 근거로 확립된다.

Constitutive properties. (구성특성)
기계 요소에 있어서 재료 거동을 설명하는 특성. 예를 들어, 선형 탄성 막대 요소에서는 탄성 계수 E와 열 팽창 계수 α와 같은 물리적 특성을 의미한다.

5. Classification of Mechanical elements

Primitive Structural Elements

Primitive 요소는 아래에 설명된 또 다른 클래스인 Macro요소와 구별되며. 이는 **더 간단한 요소로 분해될 수 없음**을 의미한다. 이러한 요소는 일반적으로 재료역학의 차원에서 파생되며 수학적 관점보다는 물리적 관점에서 더 잘 이해된다 .
예를 들어 6장에서 설명한 요소인 막대, 케이블, 빔, 샤프트 등이 있다.

Continuum Elements

Continuum 요소는 **연속체로 간주되는 구조적 구성 요소의 세분화로 표현된다**. 구조적 요소와 달리 연속체 요소는 수학적 측면에서 이해하기 쉬우며 Plate, Slices, Shell, General solids등이 있다.

Special Elements

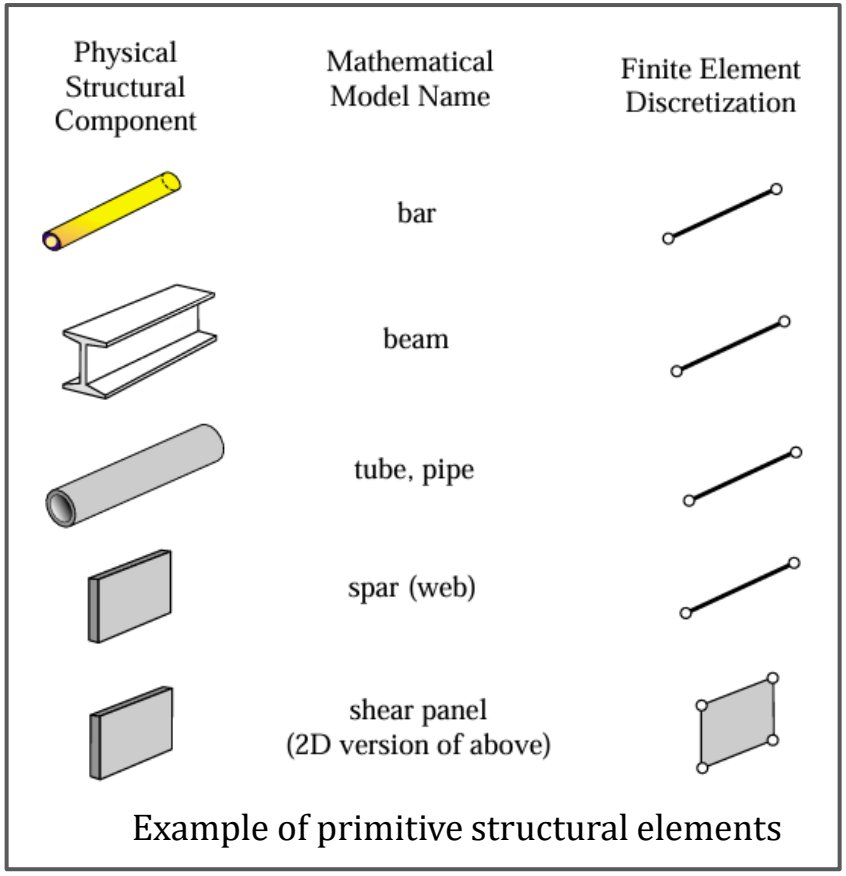
특수요소는 **구조요소와 연속요소의 특성을 동시에 가지며** 연속체 역학의 관점에서 파생되었지만 **대상문제의 물리특성과 밀접하게 관련된 기능을 포함하는 요소**이다. 예를 들어 파괴역학 적용을 위한 균열 요소, 전단 패널, 무한 및 반무한 요소, 접촉 및 페널티 요소등이 있다.

Macroelements

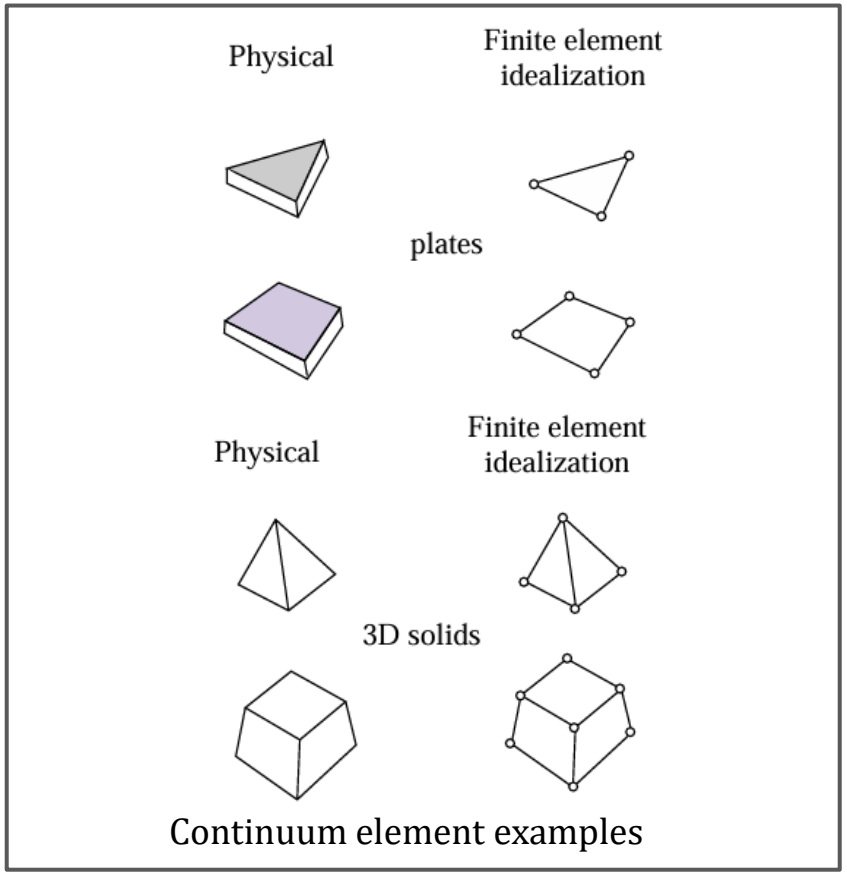
Macro 요소는 Mesh단위 또는 Super요소라고도 부르지만, 후자의 용어는 Substructures(아래 정의됨)와 겹친다. Super요소라는 용어는 기본 요소의 수준을 넘어서는 모든 수준을 포괄하는 집합적인 의미로 자주 사용된다.
Macro 요소는 구조적 구성 요소와 유사하지만 더 간단한 요소로 제작된다.

Substructures

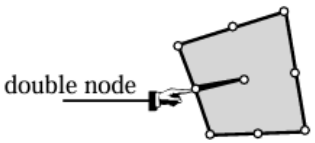
Substructures는 일반적으로 **전체 구조를 기능적 구성 요소로 절단하여 얻은 구조적 기능을 가진 매크로 요소이다**.
예를 들어 비행기의 날개와 동체, 현수교의 갑판과 케이블 등이 있는데 여기서 완전한 구조와 하위 구조 그리고 Macro 요소 간의 구별이 명확하지 않다는 점에 유의해야 한다..



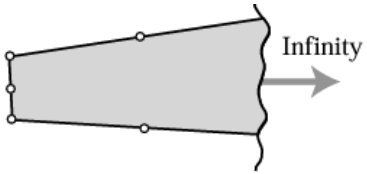
Example of primitive structural elements



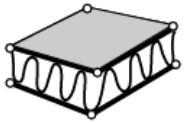
Continuum element examples



Crack element

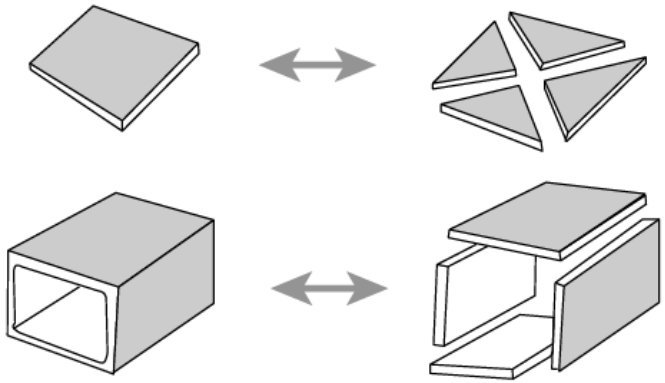


Infinite element



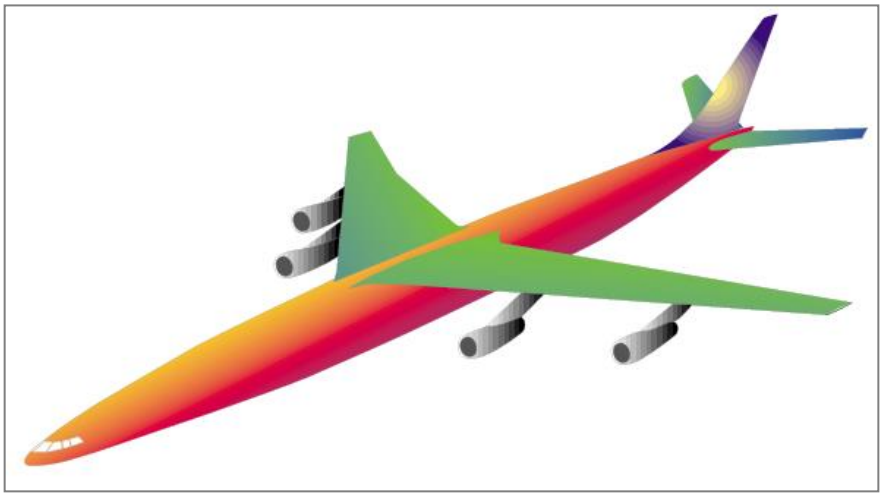
Honeycomb panel

Special element examples

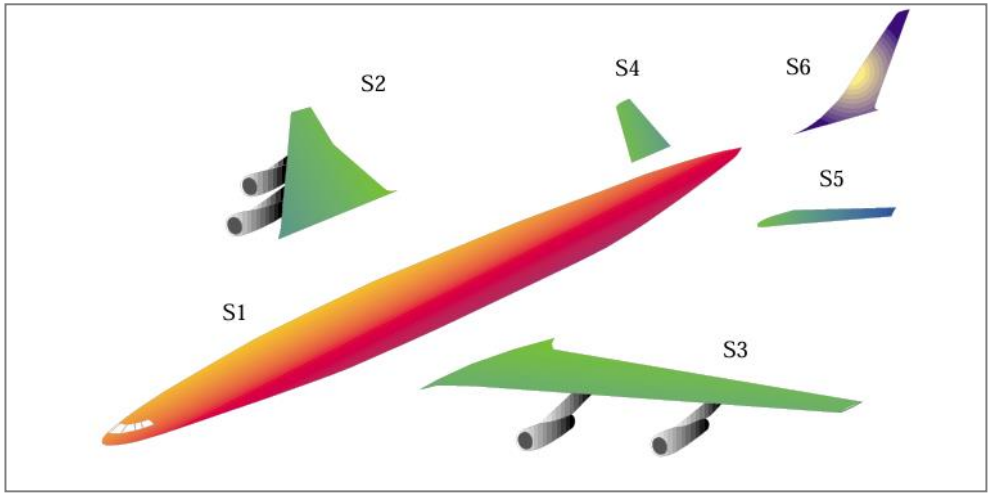


Macroelement examples.

- FEM은 항공분야에서 먼저 시작했는데 항공기의 크기가 너무 크기 때문에 여러 부분으로 나누어서 해석함.
- 특정부분에 하중이 발생되면 그 하중이 전파되어 Subsystem의 경계 면에서 Input으로 사용함
- 이러한 방법으로 초기설계 시 대략적인 해석으로 판단 .



A complete airplane



Broken down in to six level substructures

7. Boundary Conditions

The most difficult topic for FEM program users("the devil hides in the boundary")

Two types — **Essential**, **Natural**

1. If a BC involves one or more DOF in a direct way, it is ***essential*** and goes to the Left Hand Side(LHS) of Ku =f
   An example is a prescribed node displacement.

2. Otherwise it is ***natural*** and goes to the Right Hand Side(RHS) of Ku=f

Essential BCs are those that directly affect the degrees of freedom, and are imposed on the left-hand side vector **u**.
Natural BCs are those that do not directly affect the degrees of freedom, and are imposed on the right-hand side vector **f**.

CH8. FEM Modeling : Mesh, Loads and BCs

◆ 학습목표 : 유한요소 모델링에서 격자, 하중, 경계조건에 대해 학습한다.

- Mesh Refinement
- Element aspect Ratios
- Physical Interfaces & Boundary conditions
- 3D CAE Process Demo.(Commercial S/W)

§8.1. **GENERAL RECOMMENDATIONS** 8–3

§8.2. **GUIDELINES ON ELEMENT LAYOUT** 8–3
- §8.2.1. Mesh Refinement . . . 8–3
- §8.2.2. Element Aspect Ratios . . . 8–3
- §8.2.3. Physical Interfaces . . . 8–5
- §8.2.4. Preferred Shapes . . . 8–5

§8.3. **DIRECT LUMPING OF DISTRIBUTED LOADS** 8–5
- §8.3.1. Node by Node (NbN) Lumping . . . 8–6
- §8.3.2. Element by Element (EbE) Lumping . . . 8–7

§8.4. **BOUNDARY CONDITIONS** 8–7

§8.5. **SUPPORT CONDITIONS** 8–8
- §8.5.1. Supporting Two Dimensional Bodies . . . 8–8
- §8.5.2. Supporting Three Dimensional Bodies . . . 8–9

§8.6. **SYMMETRY AND ANTISYMMETRY CONDITIONS** 8–9
- §8.6.1. Visualization . . . 8–9
- §8.6.2. Effect of Loading Patterns . . . 8–10

1. General recommendations

- 모델링 방법의 일반적인 권고사항은 가장 간단한 모델링을 해야 한다는 것
- 어떤 요소를 사용할 것이며 얼마나 작게 나누어야 하는 문제에 있어서 복잡한 형태보다 간단하고 직관적인 요소를 사용하는 것이 좋음
- Node개수에 따라 행렬크기가 결정되기 때문에 연산 량이 기하급수적으로 증가하므로 비용효율과 직접적인 관련
- 따라서 공학문제의 응답특성을 반영하면서 가장 큰 mesh를 만드는 것이 좋다
- 개발 단계에서는 디자인이 자주 변경되고 경우에 따라 설계변수의 범위만을 알고 싶은 문제가 많기 때문에 coarse mesh를 사용하고 대략적인 margin으로 판단
- 따라서 설계초기단계에서는 완벽한 모델을 구성하지 않는다

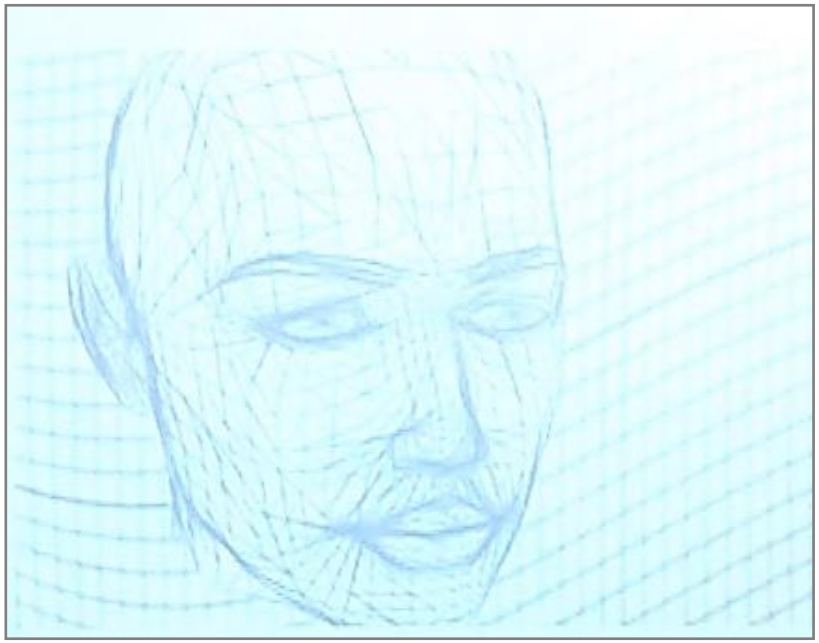
- Use the *simplest* type of finite element that will do the job.
- *Never, never, never* mess around with complicated or special elements, unless you are *absolutely sure* of what you are doing.
- Use the *coarsest mesh* you think will capture the dominant physical behavior of the physical system, particularly in *design* applications.
  설계적용에 있어서 물리적인 모델의 주된 움직임을 포착할 것이라고 생각되는 가장 큰 격자를 사용해라

3 word summary : Keep it Simple !!

2. Guidelines on element layout

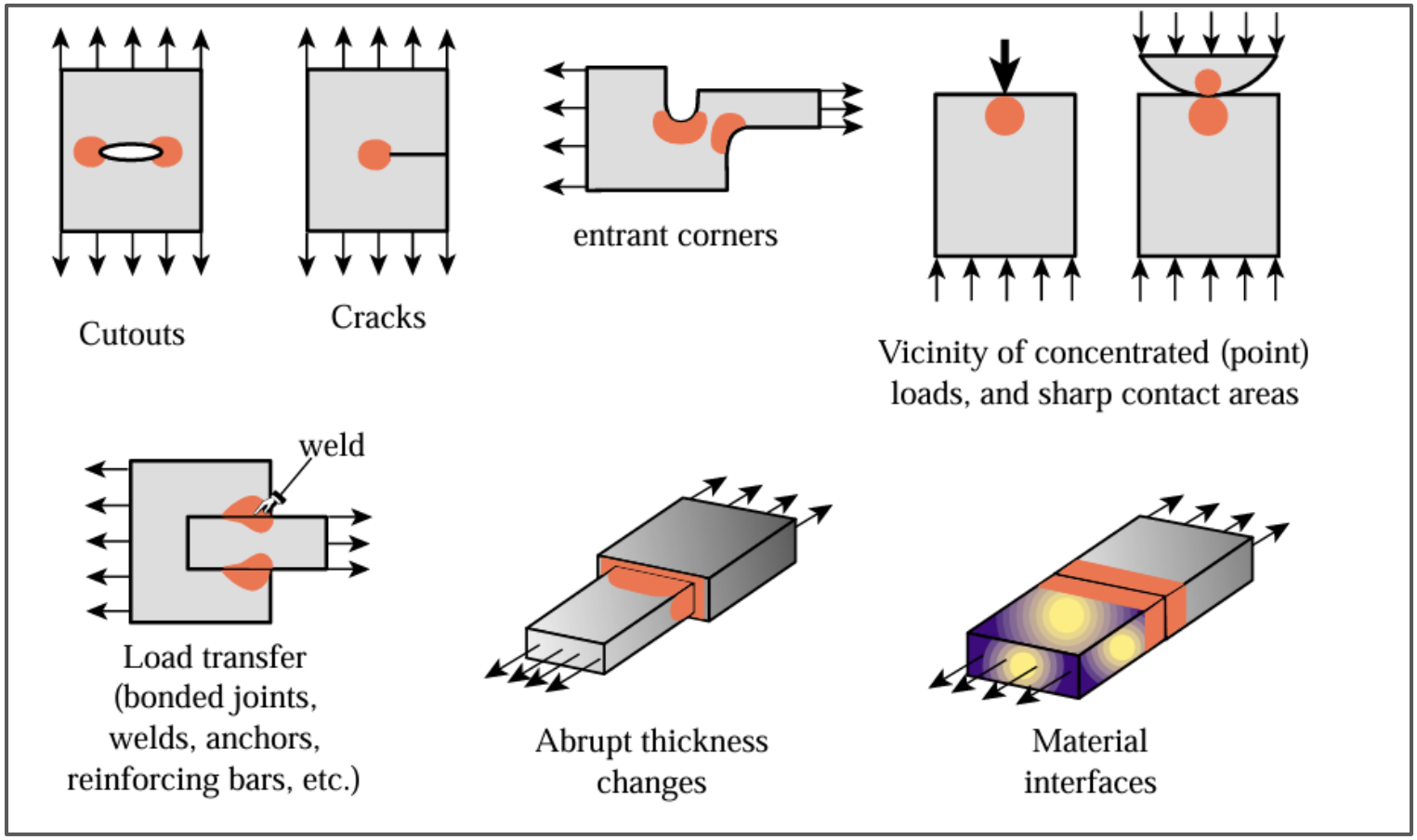
(1) Mesh refinement

- Mesh refinement는 격자를 미세하게 정교하게 다듬는 과정
- 2D 요소의 경우 삼각형 요소와 사각형 요소 중 사각형으로는 급격하게 변화하는 부분을 모사하기 어려움
- 따라서 필요한 부분들은 삼각형 요소로 조밀하고 미세하게 만들고 그렇지 않는 부분은 사각형 요소로 Coarse하게 작성
- 또한 구조문제의 경우 집중하중이 걸리거나 구멍근처 균열이 있는 경우 등 물성변화, 단면변화가 급격하면 미세하게 작성



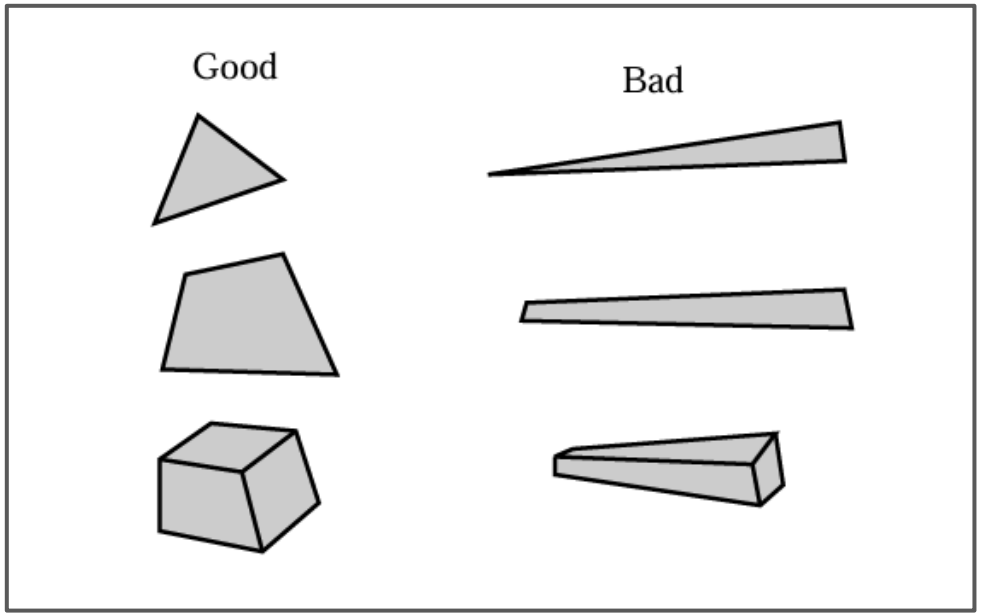
- Near entrant corners, or sharply curved edges.
- In the vicinity of concentrated (point) loads, concentrated reactions, cracks and cutouts.
- In the interior of structures with abrupt changes in thickness, material properties or cross sectional areas.

- 홀 근처, Crack에서는 조밀하게 만들고, 커브 및 용접접합부분에서 fail이 많이 발생되므로 Fine mesh 설정.
- 단면적이 급격히 변하거나, 이종재료의 경우 내부 응력차이 크게 발생되므로 Fine mesh 설정
- 압입에 따른 집중하중 발생 부 역시 Fine mesh 설정



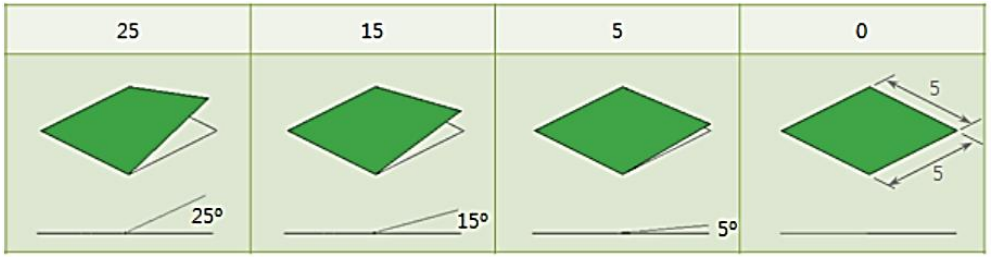
(2) Element aspect ratios

- Aspect ratio는 요소에서 가장 긴 길이와 가장 짧은 길이의 비율을 의미하며 이 값이 너무 크면 Interpolation 부정확을 유발 함
- 상용S/W에는 Auto mesh사용시 이 값에 대한 기준이 있다.
- 요소의 각도 또한 180도 근처 또는 초과하는 의 값은 수렴이 안되고 에러발생 확률이 높다(Negative Jacobian)



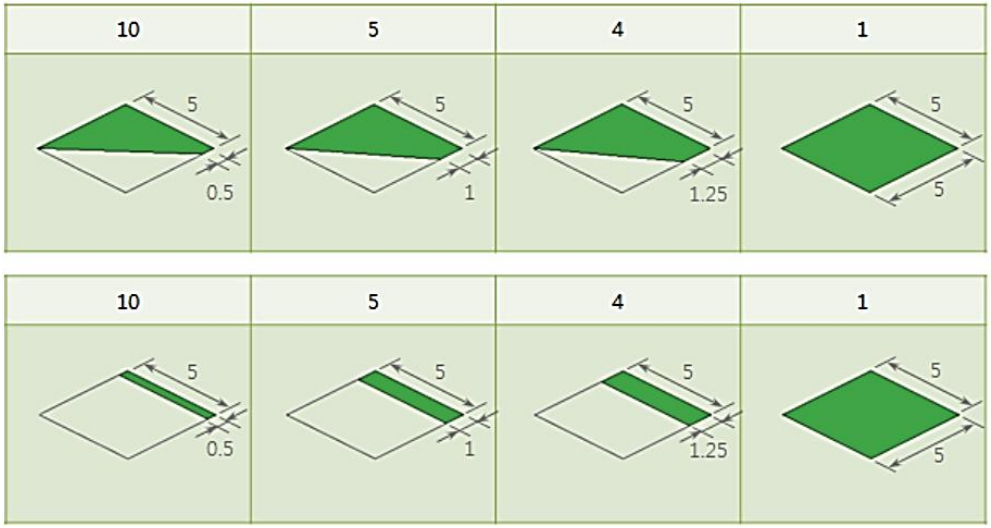
▣ Warp angle

- 요소의 하나의 절점이 다른 세 개의 절점으로 구성되는 평면으로부터 이루는 각도
- 가장 이상적인 형태는 모든 절점이 동일한 평면에 있는 경우로, 이 때 Warp angle은 0의 값을 갖는다



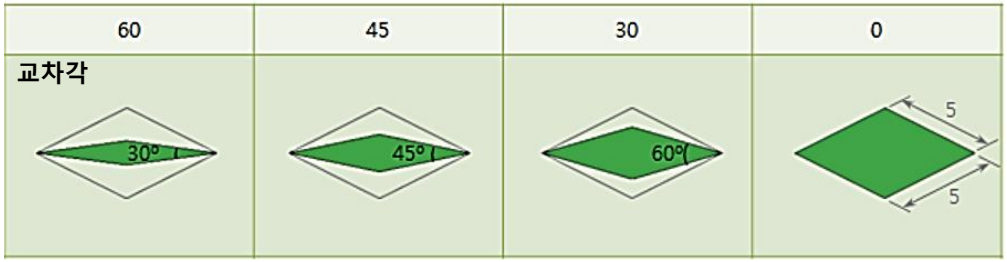
▣ Aspect ratio

- 요소를 구성하는 변의 길이 중 가장 짧은 변과 가장 긴 변의 길이의 비율
- 가장 이상적인 경우는 모든 변의 길이가 동일한 정사각형 형태로 이 때 Aspect ratio는 1의 값을 갖는다



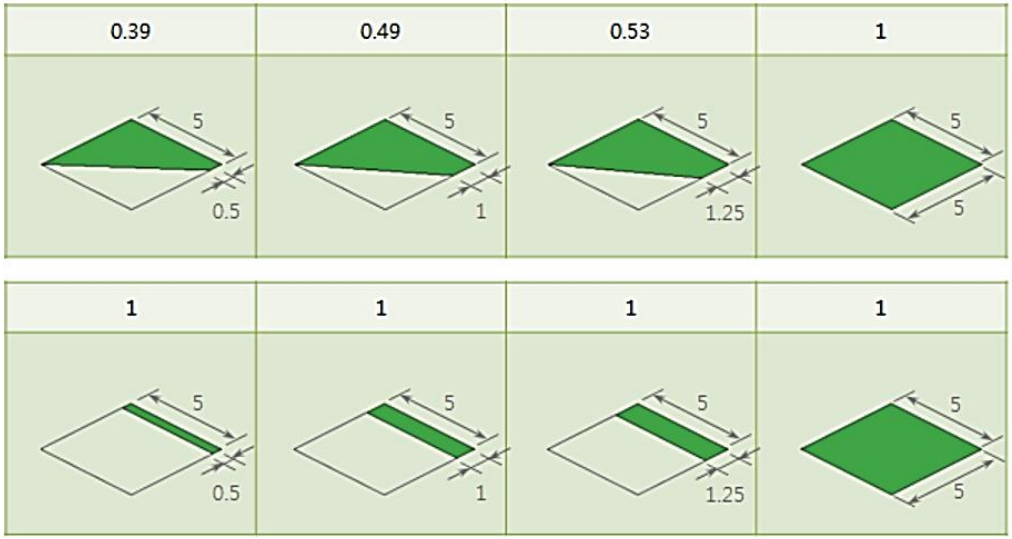
▣ Skew angle

- Skew angle은 90˚- α 로 정의되며, 요소가 얼마나 뾰족한 지에 대한 판단을 할 수 있다.
- 가장 이상적인 경우는 모든 꼭지점의 각도가 동일한 정사각형 형태로 이 때 Skew angle은 0의 값을 갖는다



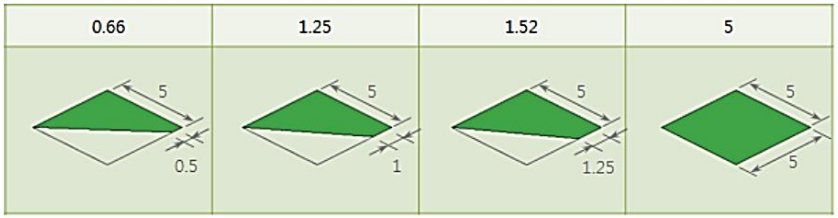
▣ Jacobian

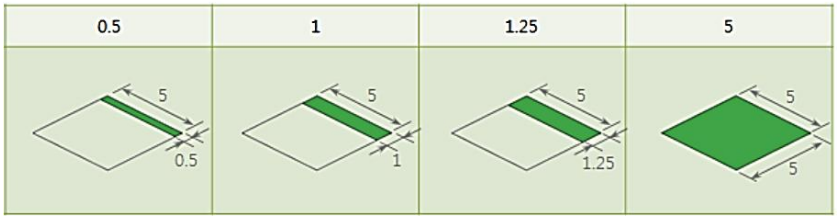
- 가장 이상적인 경우는 직각사각형 형태로 이 때 Jacobian은 1의 값을 갖는다



▣ Minimum element length

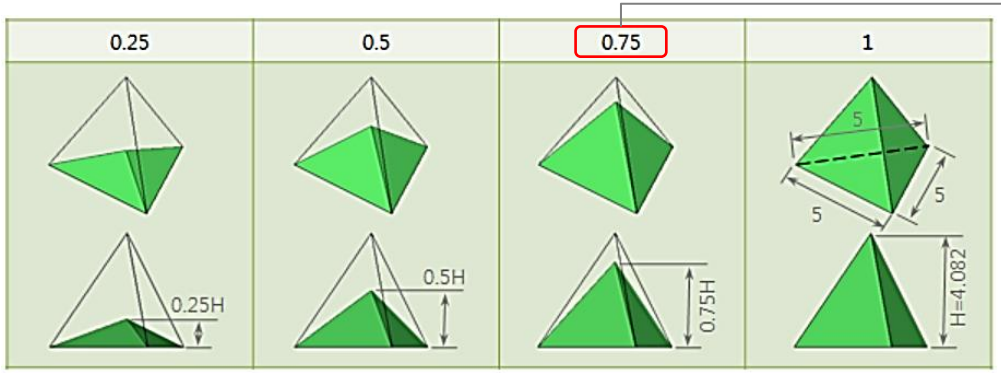
- 요소의 짧은 변의 길이를 나타낸다.
- 이 값은 충돌해석 수행 시 확인해야 하는 내용으로, 요소 길이가 짧을 수록 해석시간이 많이 소요된다





▣ Tetra Collapse

- 3차원 요소로 사면체를 사용할 경우, 요소가 얼마나 납작한지 파악하는 기준이 된다.
- 가장 이상적인 경우는 정사면체의 형태로 이 때 Tetra Collapse 는 1의 값을 갖게 된다.($h \times 1.24/A$)
- 충돌해석 수행 시 Tetra Collapse 값이 작을 경우 작은 하중에도 negative volume 에러를 발생할 수 있다



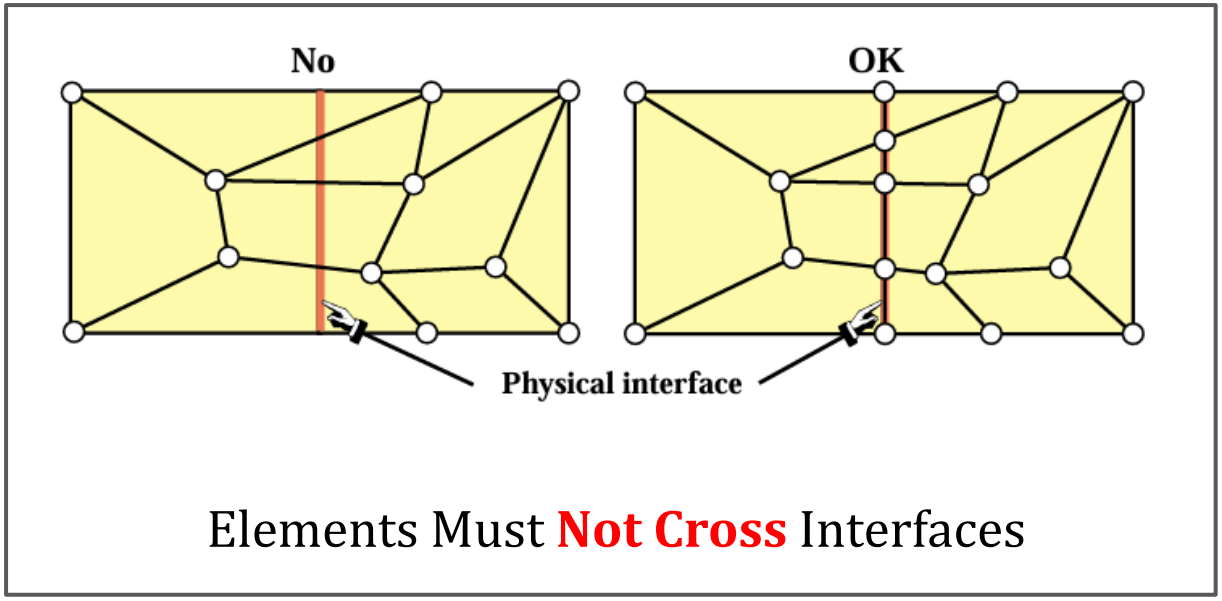
$$\frac{h \times 1.24}{A} = \frac{4.082 \times 0.75 \times 1.24}{5} = 0.75$$

Element Quality	Criteria	Error
Warping Angle	<20°	<0%
Aspect Ratio	<5	<0%
Min length	>1.5mm	<1%
Jacobian	>0.6	<0%

[출처] https://blog.naver.com/matrix3by3/221269968797

(3) Physical interfaces

- 이종재질로 구성된 대상 체는 요소를 재질 별로 구분하여 요소 하나는 동일한 재질이 되도록 한다



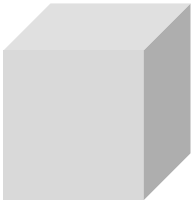
(4) Preferred shapes

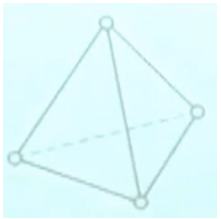
- 해의 수렴성과 관련되며 삼각형 요소는 Geometry 구현에 유리하며, 사각형 요소는 수렴성이 좋다

In 2D

Quadrilaterals > Triangles

In 3D



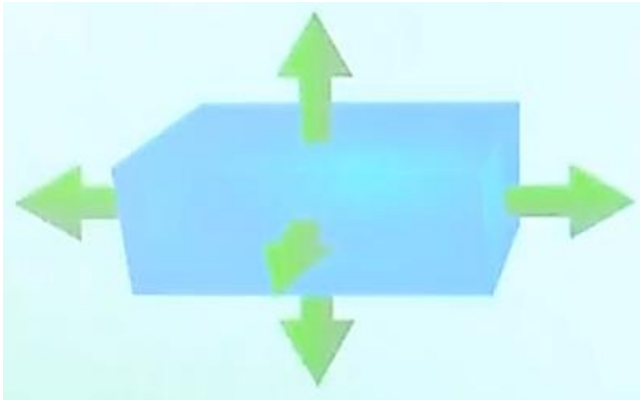


Bricks > Wedges > Tetrahedra

3. Boundary condition

(1) Rigid body motions

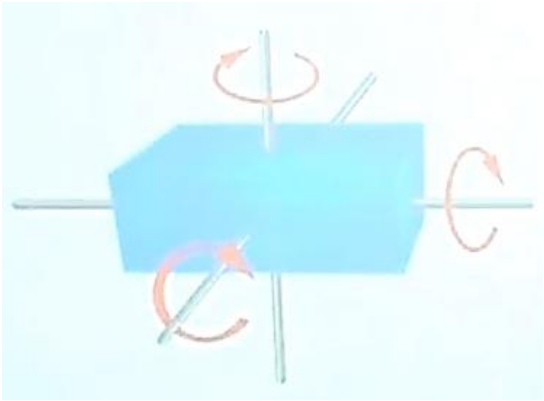
- 일반적으로는 병진과 회전이 복합적으로 나타남



Translations Motions

병진운동

질점계의 모든 질점이 똑같은
변위로 평행 이동하는 운동

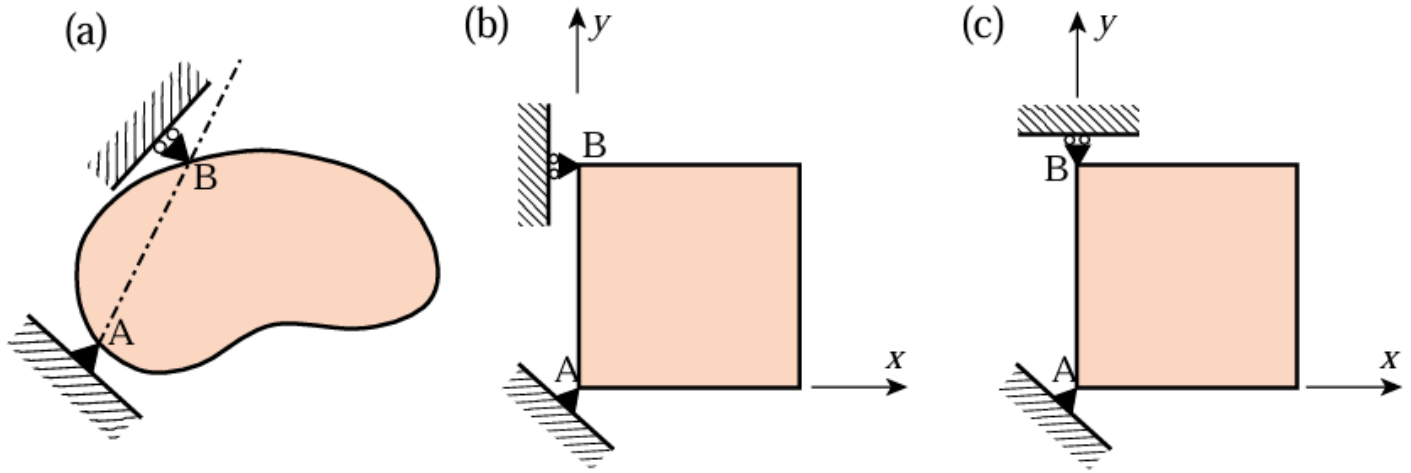


Rotation Motions

회전운동

무게중심을 정점으로 하여 원을
그리면서 회전하는 운동

(2) Support conditions in 2D

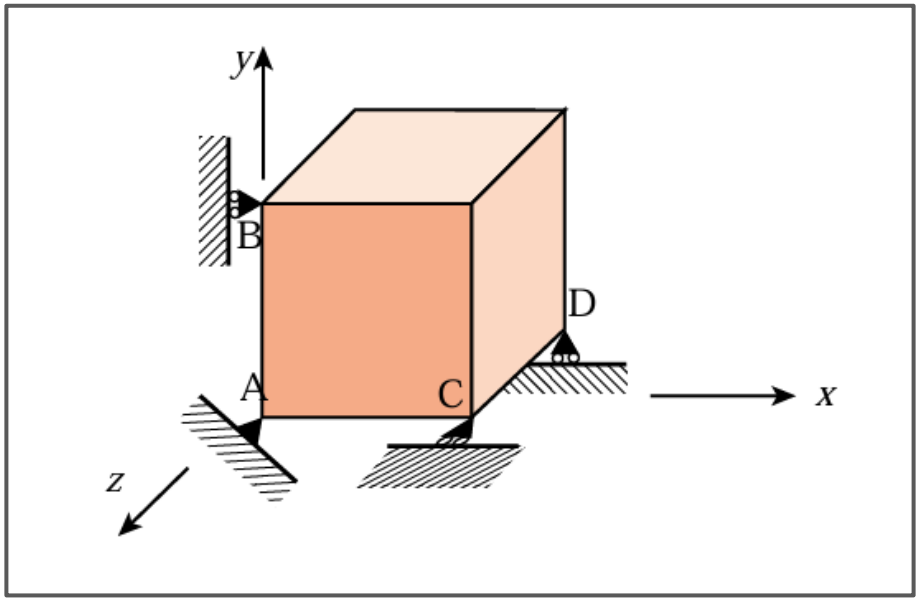


Two Translations along x and y, one rotation about z.

Thus the minimum number of constraints in 2D is 3

(3) Support conditions in 3D

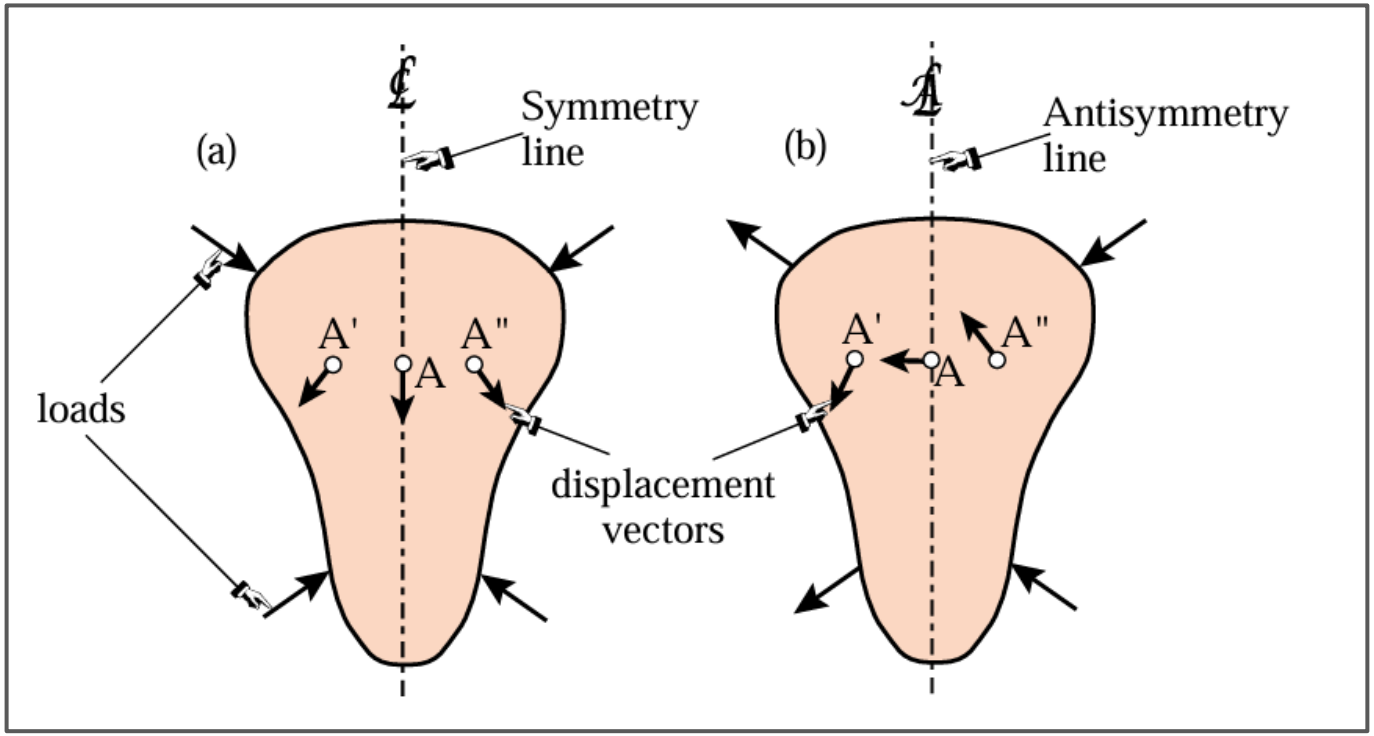
- 경계조건이 없으면 강체모드로 운동→응력과 변형차원에서 무의미한 운동이 되기 때문에 구조 FEM에서 고려하지 않는다.
  : 최소한 한 개 이상은 구속을 해야 하중에 대해 응력과 변형이 발생된다
- 점 A는 힌지조건 이므로 세 개의 병진 자유도는 모두 고정되었으며 세 개의 회전만 처리해야 한다.
- z에 대한 회전을 방지하기 위해 점 B에서 x방향 변위가 구속되어야 한다.
- y에 대한 회전을 방지하기 위해 점 C에서 z방향 변위가 구속되어야 한다.
- x에 대한 회전을 방지하기 위해 점 D에서 y방향 변위가 구속되어야 한다.



4. Symmetry and Anti-symmetry conditions

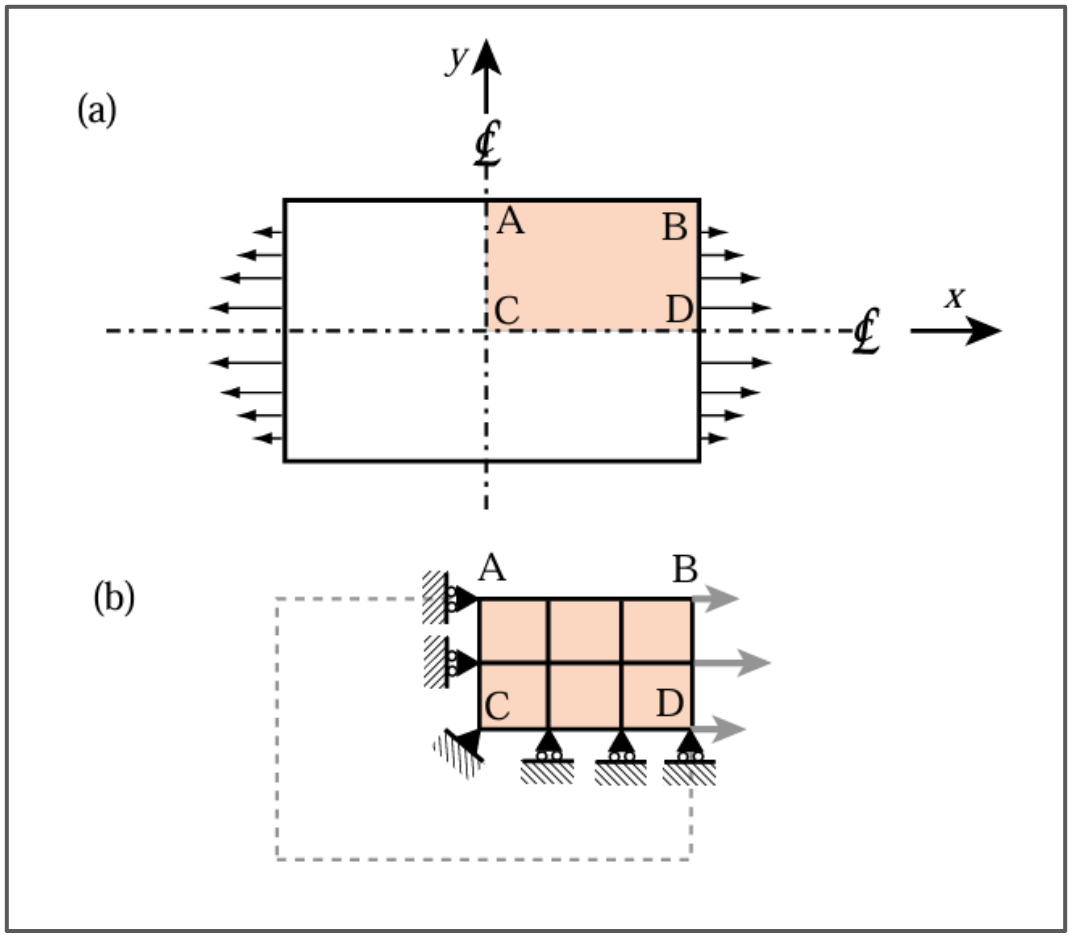
(1) Visualization

- 대칭인 모델의 경우 절반모델 또는 ¼모델 등으로 줄여서 요소개수를 감소시킬 수 있다.
- Geometry와 하중이 완전히 대칭인 경우에 해당.

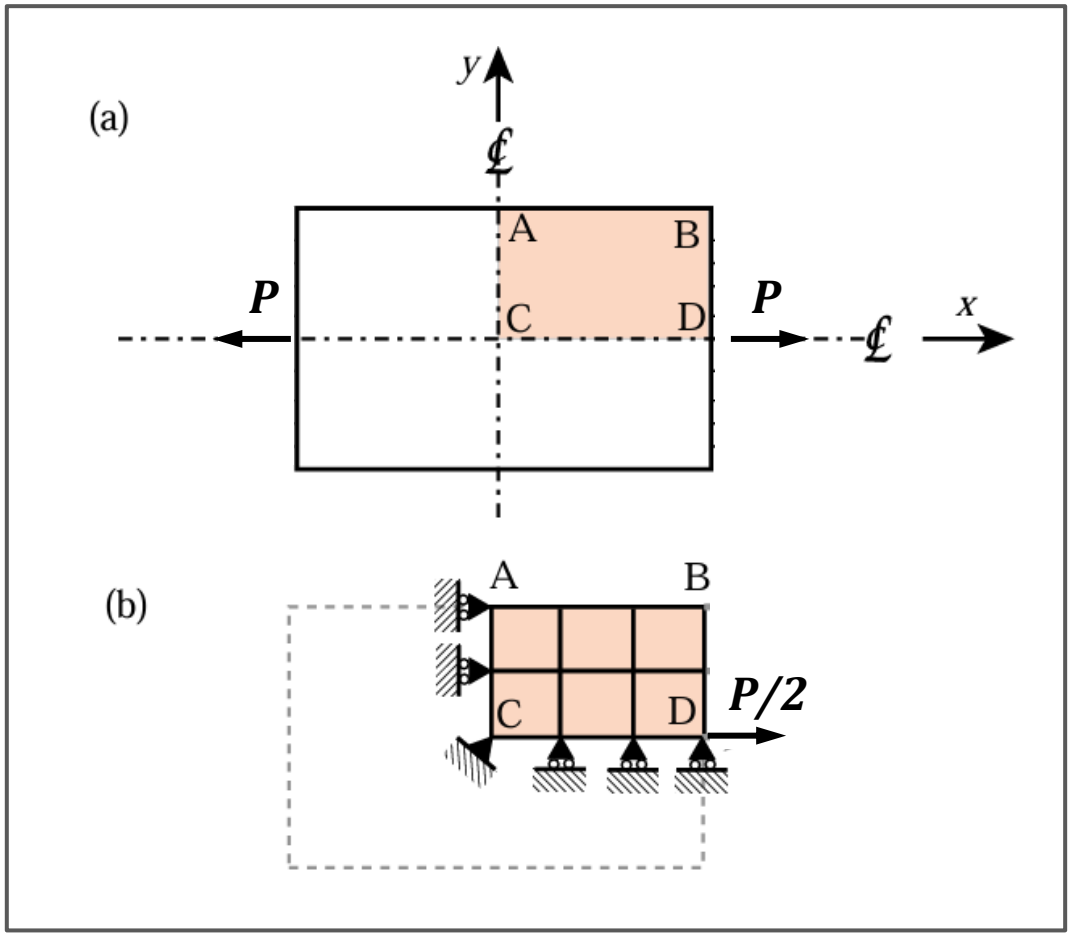


(2) Effect of loading patterns

- 대칭조건 사용해서 해석 시 실제 Full모델의 해석결과와 동일한지 검증이 필요 함.
- 대칭면은 원래 모재가 있는 상태이므로 모재가 존재할 때의 운동이 구현되는 BC를 적용해야 함



- 대칭조건 적용 시 하중도 분할되어 적용 됨



▪ Summery

- ✓ Discretization : Meshing, Refinement
- ✓ 요소타입 : 삼각, 사각요소들의 장 단점
- ✓ Aspect ratio : 낮게 하면 요소 수가 많아지지만 해의 정확도는 증가
- ✓ Mesh의 개수 : 얼마만큼 많은 개수로 만들 것인가? 형상에 맞도록, 초기설계 시에는 단순한 해석
- ✓ 경계조건과 자유도의 설정
- ✓ 강체모드 피할 수 있도록 BC를 설정 함
- ✓ 대칭경계조건 가능여부와 적용 시 대칭면의 경계조건 및 하중

CH12. Variational Formulation of Bar Element

◆ 학습목표 : 변분법에 의한 Bar 요소의 유한요소 방정식을 학습한다.

- Definition of Bar Member
- Total Potential Energy Functional
- Example
- The Bar Element Stiffness & Nodal Force

TABLE OF CONTENTS

		Page
§12.2.	**A NEW BEGINNING**	12–3
§12.2.	**DEFINITION OF BAR MEMBER**	12–3
§12.3.	**VARIATIONAL FORMULATION**	12–4
	§12.3.1. The Total Potential Energy Functional	12–4
	§12.3.3. Variation of an Admissible Function	12–6
	§12.3.4. The Minimum Potential Energy Principle	12–7
	§12.3.4. TPE Discretization	12–7
	§12.3.6. Bar Element Discretization	12–8
	§12.3.6. Shape Functions	12–8
	§12.4.0. The Strain-Displacement Equation	12–9
§12.4.	**THE FINITE ELEMENT EQUATIONS**	12–9
	§12.4.2. The Stiffness Matrix	12–10
	§12.6.0. The Consistent Node Force Vector	12–11
§12.6.	***NODAL EXACTNESS AND SUPERCONVERGENCE**	12–11
§12.6.	**NOTES AND REFERENCES**	12–12
§12.	**References**	12–12
§12.	**Exercises**	12–13

1. Definition of bar member

(1) One bar dimension : the longitudinal dimension or axial dimension is much larger that the other two dimensions, which are collectively known as transverse dimensions.
The intersection of a plane normal to the longitudinal dimension and the bar defines the cross sections.
The longitudinal dimension defines the longitudinal axis.

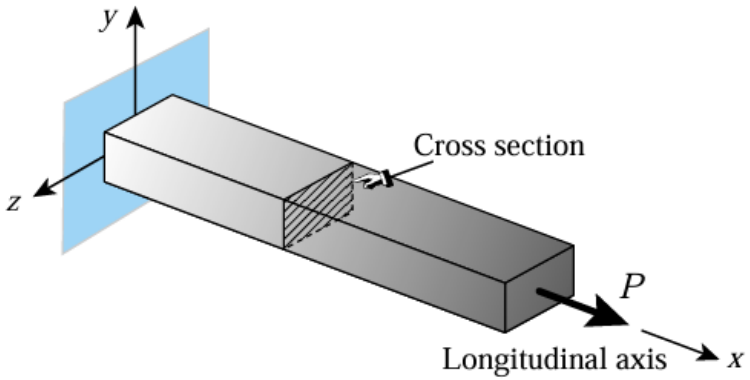
(2) The bar resists an internal axial force along its longitudinal dimension.

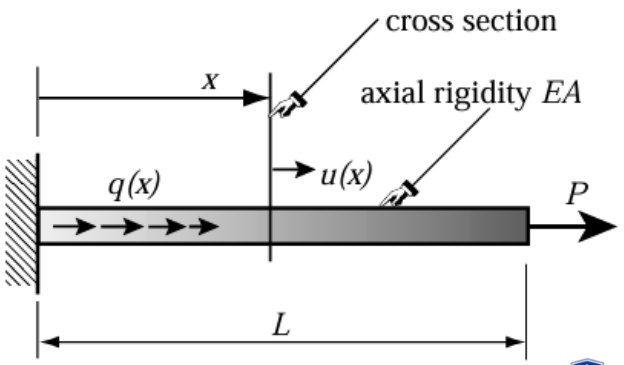
	바(bar)	빔(beam)
특징	축방향 힘을 받는 부재	축방향 하중과 굽힘 하중을 모두 견딜 수 있는 부재
역할	일반적으로 축방향 힘을 받는 부재	굽힘에 저항하고 프레임 구조물에 사용할 수 있다

Quantity	*Meaning*
x	Longitudinal bar axis*
$(.)'$	$d(.)/dx$
$u(x)$	Axial displacement
$q(x)$	Distributed axial force, given per unit of bar length
L	Total bar length
E	Elastic modulus
A	Cross section area; may vary with x
EA	Axial rigidity
$e = du/dx = u'$	Infinitesimal axial strain
$\sigma = Ee = Eu'$	Axial stress
$p = A\sigma = EA\,e = EAu'$	Internal axial force
P	Prescribed end load

* x is used in this Chapter instead of $\bar{x}$ (as in Chapters 2–3) to simplify the notation.

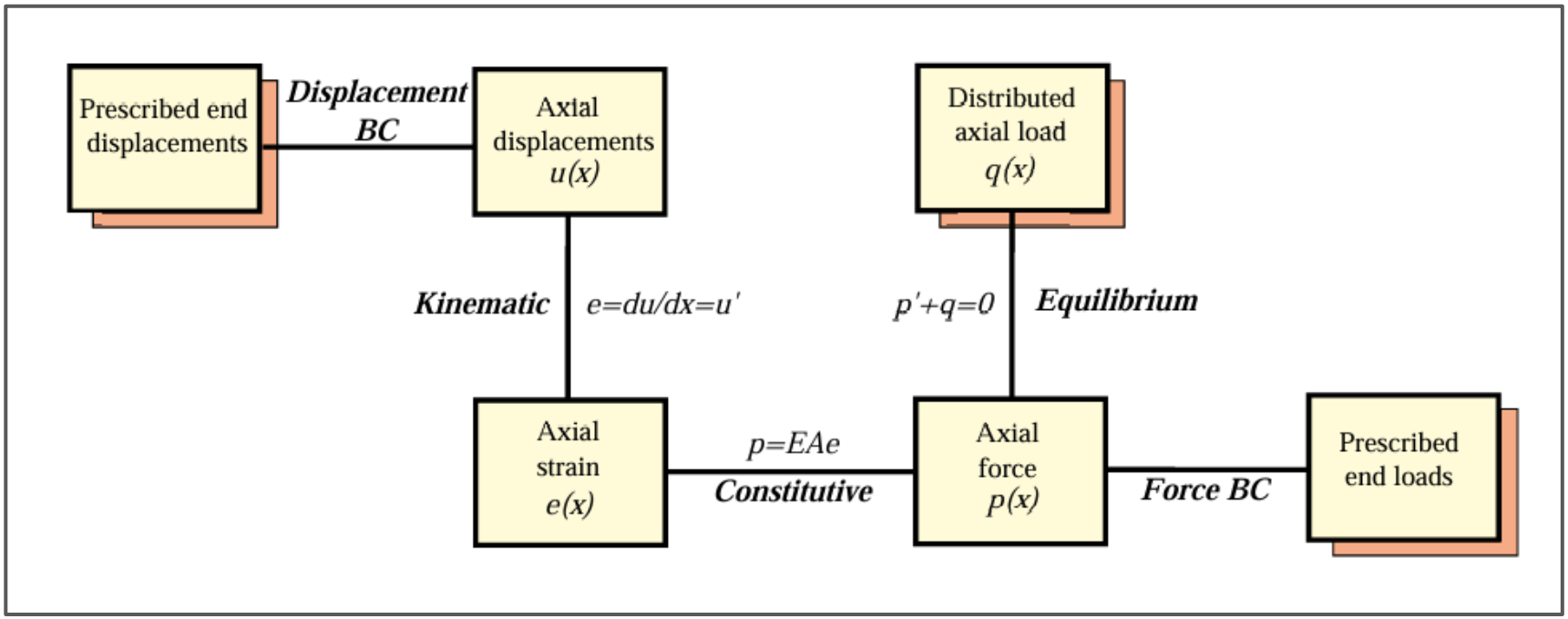
- U(x)만 알면 변형율, 응력을 알 수 있는 State variable
- q(x)는 단위길이당 분포하중.





2. Variational formulation

(1) The total potential energy functional



Potential Energy of the Bar Member

(before discretization)

- Internal energy

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L pe\,dx = \frac{1}{2}\int_0^L (EAu')u'\,dx = \frac{1}{2}\int_0^L u'EA\,u'\,dx,$$

- External work

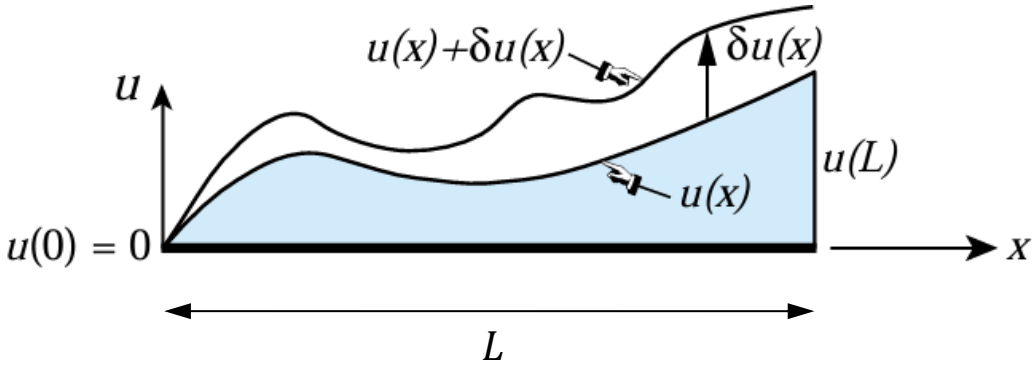
$$W = \int_0^L qu\,dx.$$

- Total potential energy

$$\boxed{\Pi = U - W}$$

(2) Variation of an admissible function

Concept of kinematically admissible variation



$\delta u(x)$ is kinematically admissible if $u(x)$ and $u(x) + \delta u(x)$

(i) are continuous over the bar length

(ii) satisfy exactly displacement BC. In the figure $u(0) = 0$

(3) The minimum potential energy principle

The minimum potential Energy(MPE) Principle

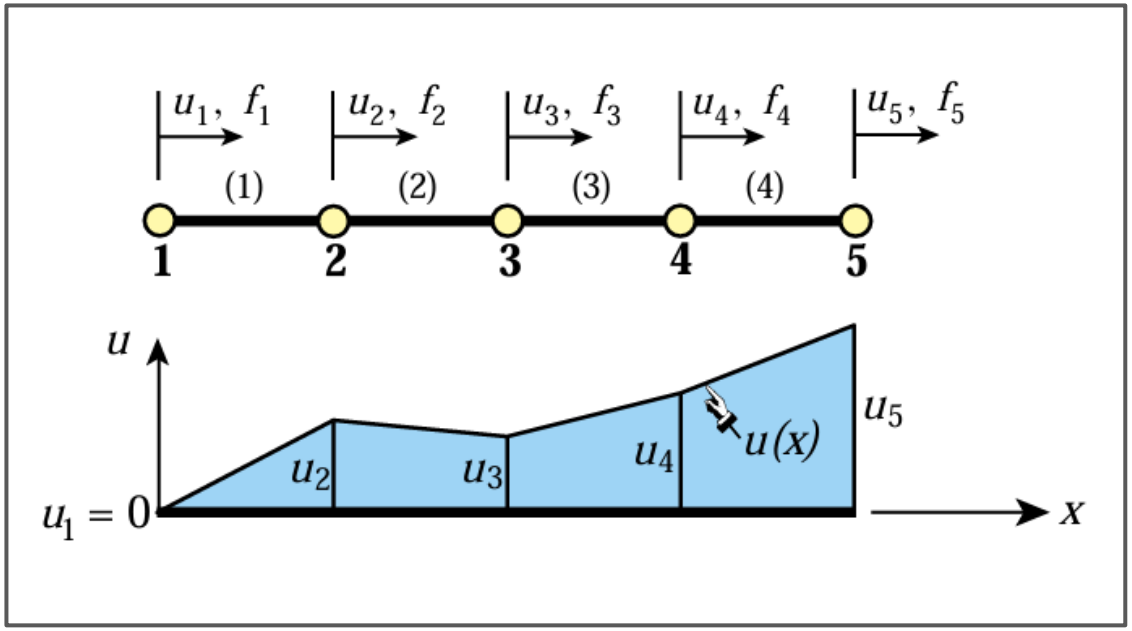
The MPE principle states that the actual displacement solution $u^*(x)$ that satisfies the governing equations is that which renders the TPE functional $\Pi(u)$ stationary :

$$\delta\Pi = \delta U - \delta W = 0 \quad \text{iff} \quad u = u^*$$

with respect to admissible variations $u = u^* + \delta u$ of the exact displacement field $u^*(x)$

(4) TPE Discretization

- x=0에서는 Essential BC로써 0이어야 한다.
- 요소 내 함수는 연속이어야 한다
- 요소와 요소 사이는 일치(연속)해야 한다, 미분은 불가(곡선이 아니더라도 된다)piecewise continuous 이면 충분하다



Total potential energy principle and decomposition over elements

$$\delta\Pi = \delta U - \delta W = 0 \quad \text{iff} \quad u = u^*$$

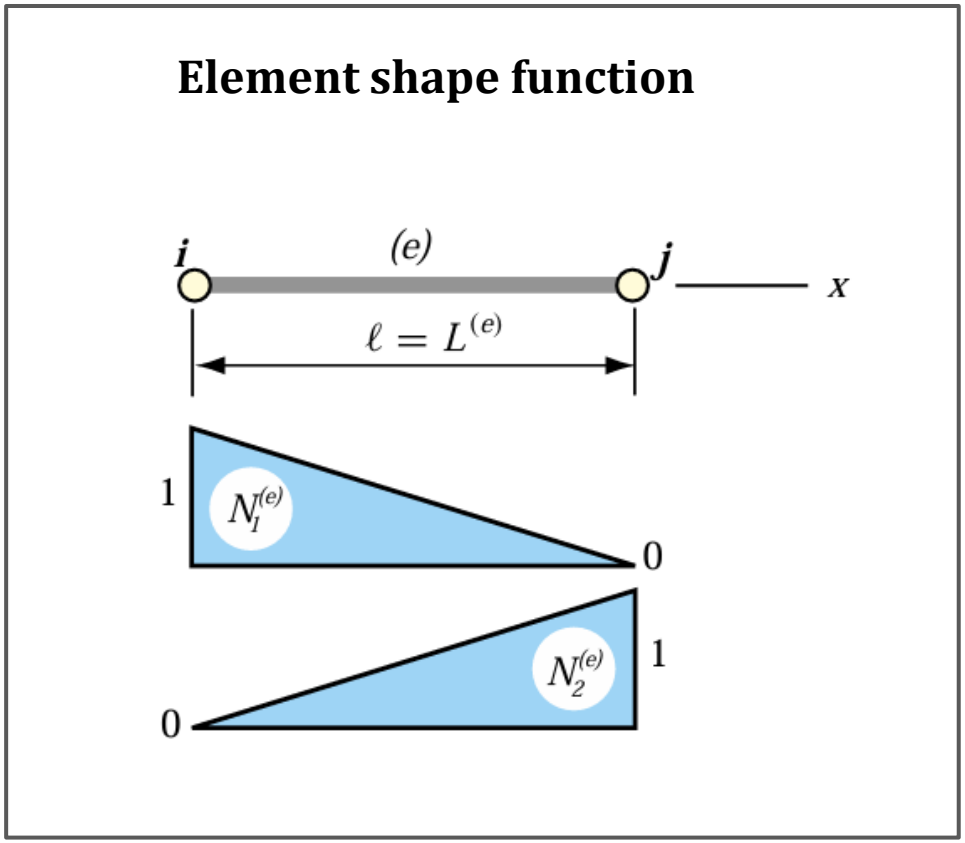
But $$\Pi = \Pi^{(1)} + \Pi^{(2)} + \ldots + \Pi^{(N_e)}$$

and $$\delta\Pi = \delta\Pi^{(1)} + \delta\Pi^{(2)} + \ldots + \delta\Pi^{(N_e)} = 0.$$

From fundamental lemma of variational calculus,
each component variation must vanish, giving

$$\delta\Pi^{(e)} = \delta U^{(e)} - \delta W^{(e)} = 0.$$

(5) Shape function



Linear displacement interpolation

$$u^{(e)}(x) = N_i^{(e)} u_i^{(e)} + N_j^{(e)} u_j^{(e)} = [\, N_i^{(e)} \quad N_j^{(e)} \,] \begin{bmatrix} u_i^{(e)} \\ u_j^{(e)} \end{bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{u}^{(e)}.$$

In which

$$N_i^{(e)} = 1 - \frac{x}{\ell} = 1 - \zeta, \qquad N_j^{(e)} = \frac{x}{\ell} = \zeta$$

$\zeta = x/\ell$ is a dimensionless coordinate.

3. The finite element equations

Displacement variation process yields the element stiffness equations

$$\Pi^{(e)} = U^{(e)} - W^{(e)}, \quad U^{(e)} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{u}^{(e)})^T \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)}, \quad W^{(e)} = (\mathbf{u}^{(e)})^T \mathbf{f}^{(e)}$$

$$\delta\Pi^{(e)} = \left(\delta\mathbf{u}^{(e)}\right)^T \frac{\partial \Pi^{(e)}}{\partial \mathbf{u}^{(e)}} = \left(\delta\mathbf{u}^{(e)}\right)^T \left[\mathbf{K}^{(e)}\mathbf{u}^{(e)} - \mathbf{f}^{(e)}\right] = 0$$

arbitrary ↓ 0 ↓

$$\boxed{\mathbf{K}^{(e)}\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{f}^{(e)}}$$

The element stiffness equations

(1) The stiffness matrix

The bar element stiffness

$$U^{(e)} = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} e\,EA\,e\,dx,$$

$$U^{(e)} = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} \begin{bmatrix} u_i^{(e)} & u_j^{(e)} \end{bmatrix} \frac{1}{\ell}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} EA \frac{1}{\ell}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^{(e)} \\ u_j^{(e)} \end{bmatrix} dx.$$

$$U^{(e)} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} u_i^{(e)} & u_j^{(e)} \end{bmatrix} \int_0^{\ell} \frac{EA}{\ell^2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx \begin{bmatrix} u_i^{(e)} \\ u_j^{(e)} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{u}^{(e)}\right)^T \mathbf{K}^{(e)}\mathbf{u}^{(e)}$$

$$\boxed{\mathbf{K}^{(e)} = \int_0^{\ell} \frac{EA}{\ell^2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx = \int_0^{\ell} EA\,\mathbf{B}^T\mathbf{B}\,dx,}$$

$$\boxed{\mathbf{K}^{(e)} = EA\,\mathbf{B}^T\mathbf{B}\int_0^{\ell} dx = \frac{EA}{\ell^2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\ell = \frac{EA}{\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}$$

(2) The consistent node force vector

The consistent nodal force vector

$$W^{(e)} = \int_0^\ell qu\,dx = \int_0^\ell q\,\mathbf{N}^T\mathbf{u}^{(e)}\,dx = \left(\mathbf{u}^{(e)}\right)^T \int_0^\ell q \begin{bmatrix} 1-\zeta \\ \zeta \end{bmatrix} dx = \left(\mathbf{u}^{(e)}\right)^T \mathbf{f}^{(e)}$$

$$\boxed{\mathbf{f}^{(e)} = \int_0^\ell q \begin{bmatrix} 1-\zeta \\ \zeta \end{bmatrix} dx}$$

in which $\zeta = x/\ell$

CH13. Variational Formulation of Plane Beam Element

◆ 학습목표 : 변분법에 의한 Bar 요소의 유한요소 방정식을 학습한다.

- The Classical Beam Theory
- Total Potential Energy Functional
- Shape Function
- Example

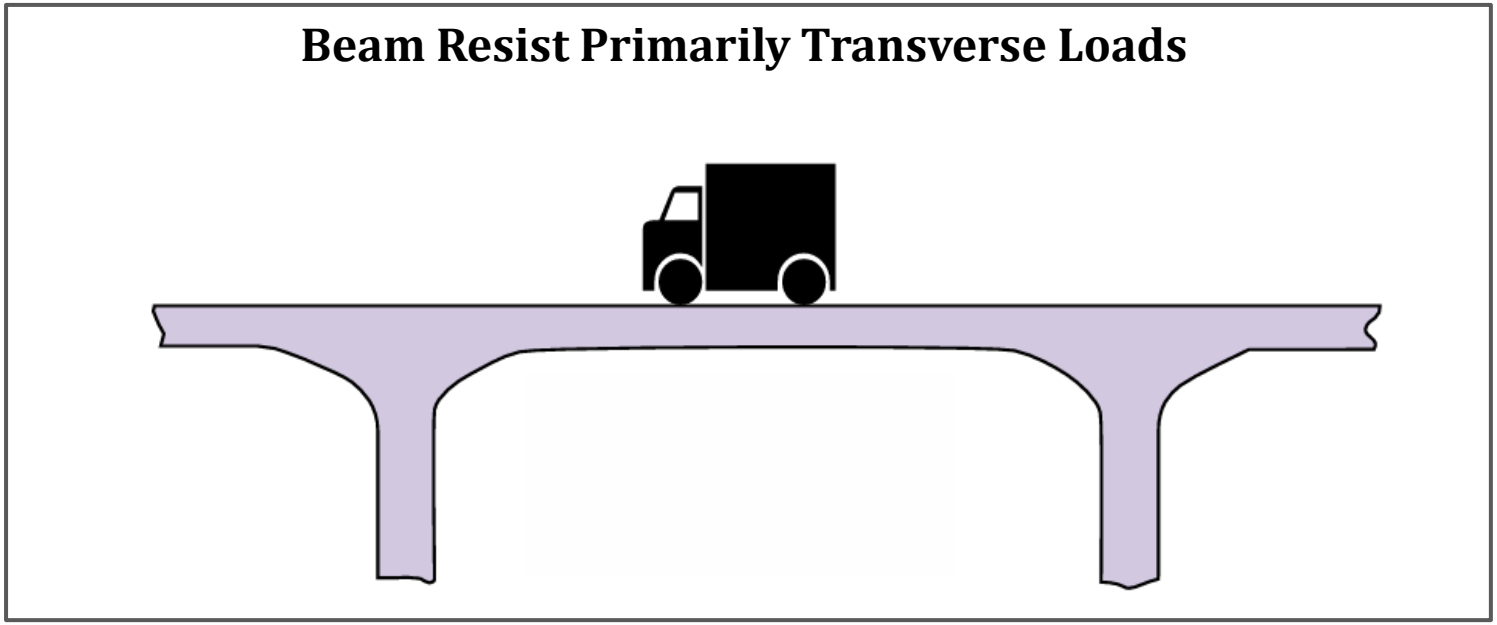
TABLE OF CONTENTS

		Page
§13.1.	**INTRODUCTION**	13–3
§13.2.	**WHAT IS A BEAM?**	13–3
	§13.2.1. Terminology	13–3
	§13.2.2. Mathematical Models	13–4
	§13.2.3. Assumptions of Classical Beam Theory	13–4
§13.3.	**THE CLASSICAL BEAM THEORY**	13–5
	§13.3.1. The Neutral Axis	13–5
	§13.3.2. Element Coordinate Systems	13–5
	§13.3.3. Kinematics	13–6
	§13.3.4. Loading	13–6
	§13.3.5. Support Conditions	13–6
	§13.3.6. Strains, Stresses and Bending Moments	13–6
§13.4.	**TOTAL POTENTIAL ENERGY FUNCTIONAL**	13–7
§13.5.	**BEAM FINITE ELEMENTS**	13–9
	§13.5.1. Finite Element Trial Functions	13–9
	§13.5.2. Shape Functions	13–9
§13.6.	**THE FINITE ELEMENT EQUATIONS**	13–10
	§13.6.1. The Stiffness Matrix of a Prismatic Beam	13–11
	§13.6.2. Consistent Nodal Force Vector for Uniform Load	13–12
§13.7.	***GENERALIZED INTERPOLATION**	13–12
	§13.7.1. *Hinged Plane Beam Element	13–14
	§13.7.2. *Timoshenko Plane Beam Element	13–15
§13.8.	**NOTES AND REFERENCES**	13–16
§13.	**References**	13–17
§13.	**Exercises**	13–18

계명대학교

1. What is a Beam

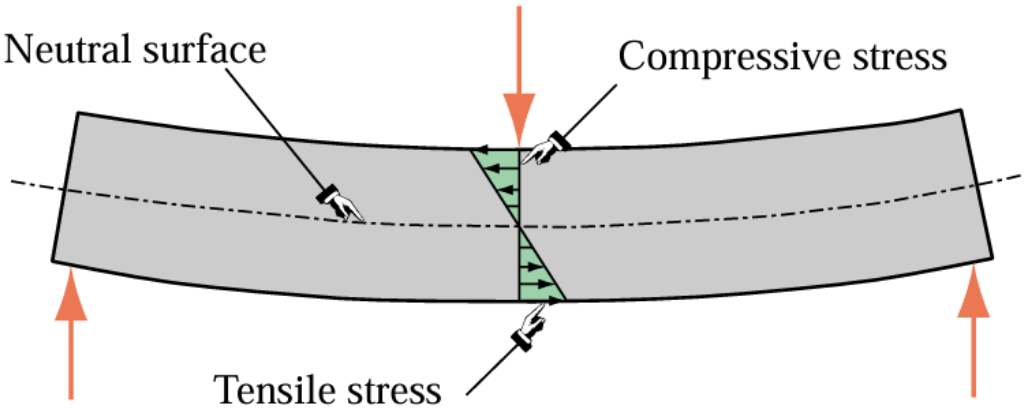
- Beam은 토목 및 기계 공학 분야에서 가장 일반적인 유형의 구조 구성 요소.
- 가로 하중을 지지하고 하중을 지지대까지 운반하는 역할을 하는 막대 모양의 구조 부재.
- "막대형"이란 의미는 치수 중 하나가 다른 두 치수보다 상당히 크다는 것을 의미 함.
- 이 치수를 빔의 축이라고 하고 축에 수직인 평면과 빔 부재의 교차점을 단면.
- Beam은 주로 굽힘 작용을 통해 횡방향 하중에 저항함
- 이러한 굽힘은 빔의 한쪽 면에 압축응력을 발생시키고 다른 면에는 인장 응력을 생성.
- 두 영역은 응력이 0인 중립 표면으로 분리되며 인장 응력과 압축 응력의 조합으로 인해 내부에는 굽힘 모멘트가 생성됨.
- 이처럼 굽힘모멘트가 발생하여 하중을 지지대에 전달하는 것이 Beam의 하중지지의 주요 메커니즘.



(1) Terminology

- 지지점 에서 반력, 집중하중점 에서 굽힘모멘트가 발생되며 굽힘모멘트에 의해 중립 축에서 압축과 인장하중이 걸린다.

Transverse Loads are Transported to supports by flexural action



(2) Assumptions of classical beam theory

- 본 장에서는 특수한 경우가 아닌 평면상태(2차원 x, y)에서의 빔의 특징을 고려함.
- 모델은 오일러 Beam을 대상으로 함

Beam configuration

Spatial(General beams)

Plane(This chapter)

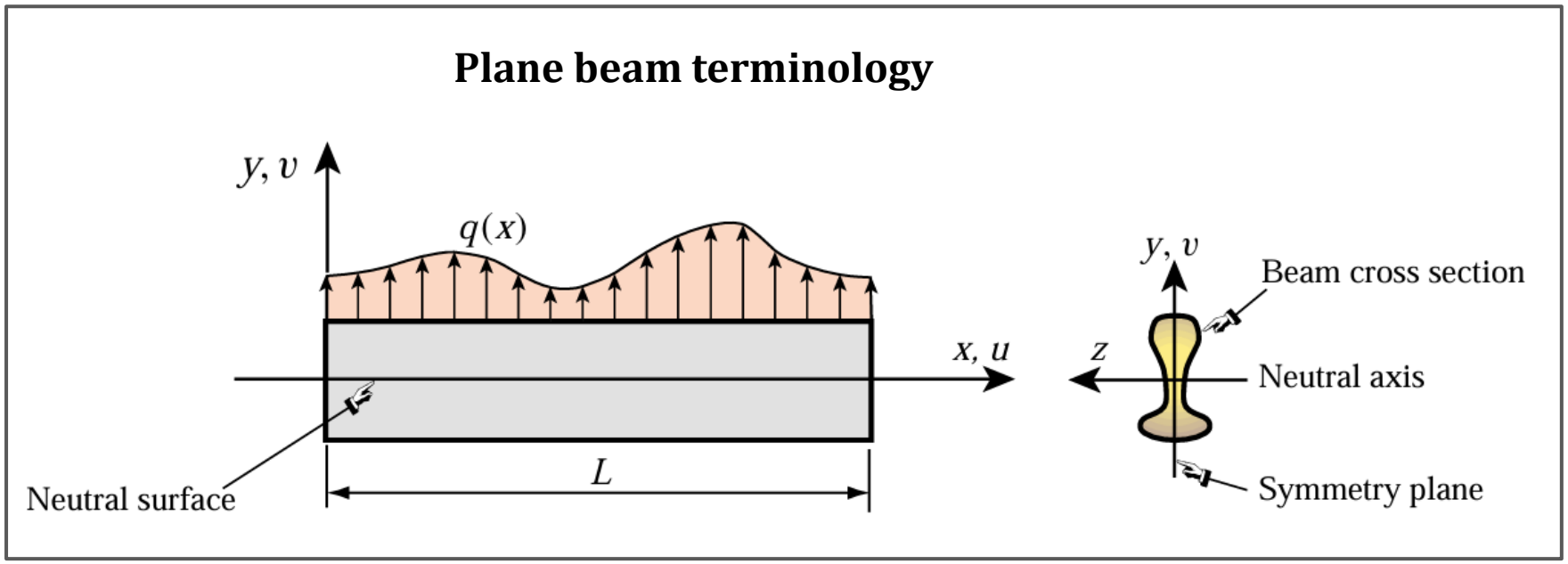
Beam Models

Bernoulli-Euler

Timoshenko(advanced topic not covered in class)

2. The classical beam theory

(1) Element coordinate systems



The Cartesian axes for plane beam analysis are chosen as follows:

1. x along the longitudinal beam axis, at neutral axis height.[2]
2. z along the neutral axis at the origin section.
3. y upwards forming a RHS system with x and z.

(2) Kinematics

Kinematics of beam

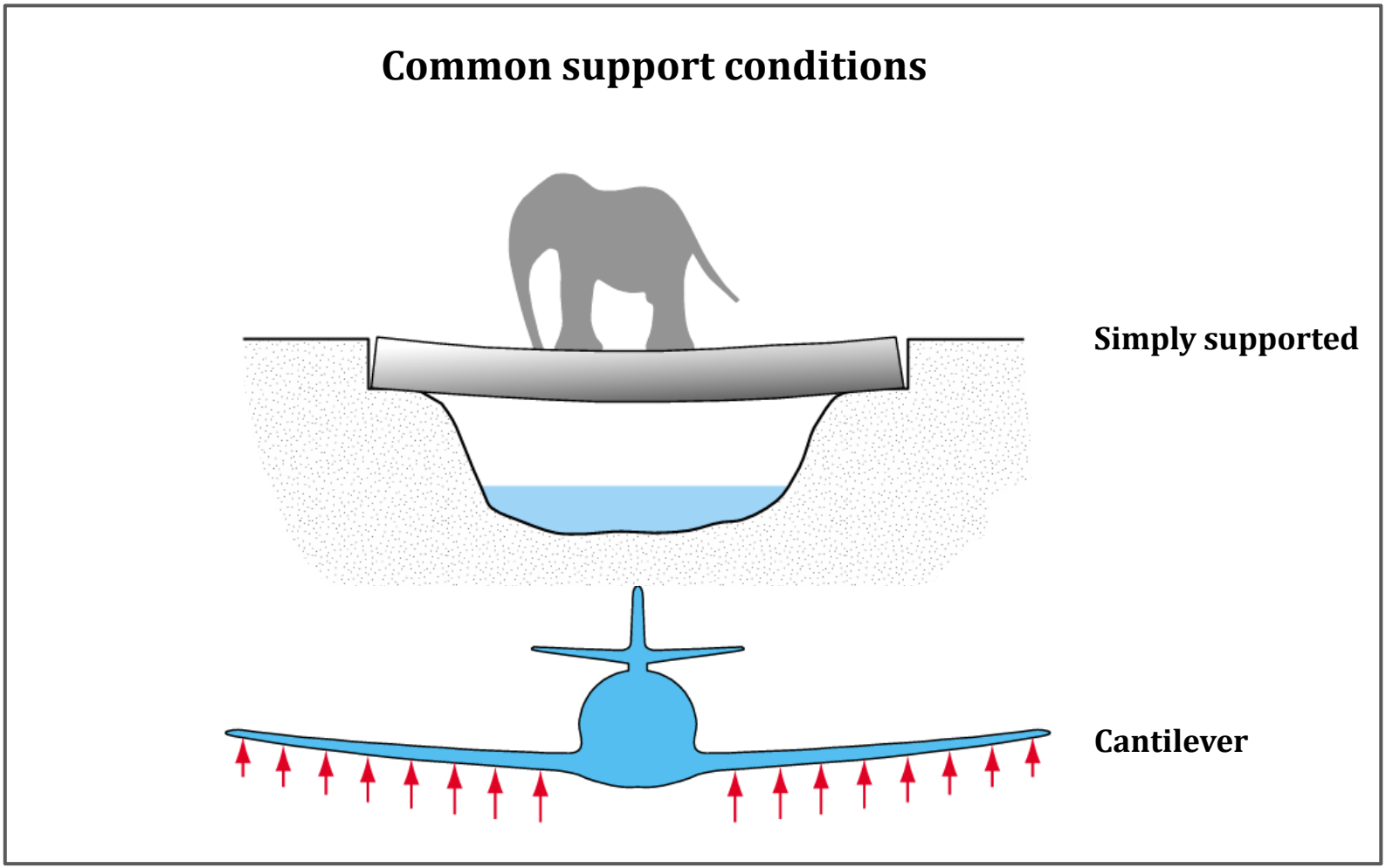
$$\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}$$

$$u(x, y) = -y\frac{\partial v(x)}{\partial x} = -yv' = -y\theta, \qquad v(x, y) = v(x).$$

- Where u and v are the axial and transvers displacement component, respectively
- Note that the slope $v' = \partial v(x)/\partial x = dv/dx$ of the deflection curve has been identified with the rotation symbol θ

(3) Loading, Support conditions

- Beam에서도 경계조건 및 하중조건에 대해 고려 함



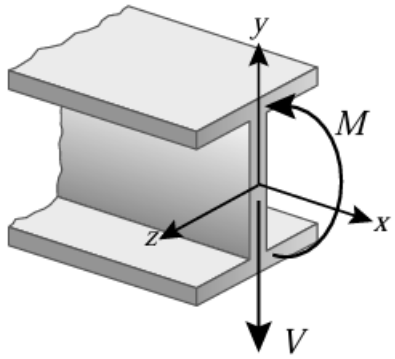
(4) Strains, Stresses and Bending moments

Basic relations for Bernoulli-Euler model of plane beam

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} = -y\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -y\frac{d^2 v}{dx^2} = -y\kappa$$

$$\sigma = Ee = -Ey\frac{d^2 v}{dx^2} = -Ey\kappa$$

$$M = \int_A -y\sigma \, dx = E\frac{d^2 v}{dx^2}\int_A y^2 \, dA = EI\kappa$$



Positive sign convention for M and V.

* Beam에서 Key variable는 $v(x)$

3. Total potential energy functional

Total potential energy of beam member

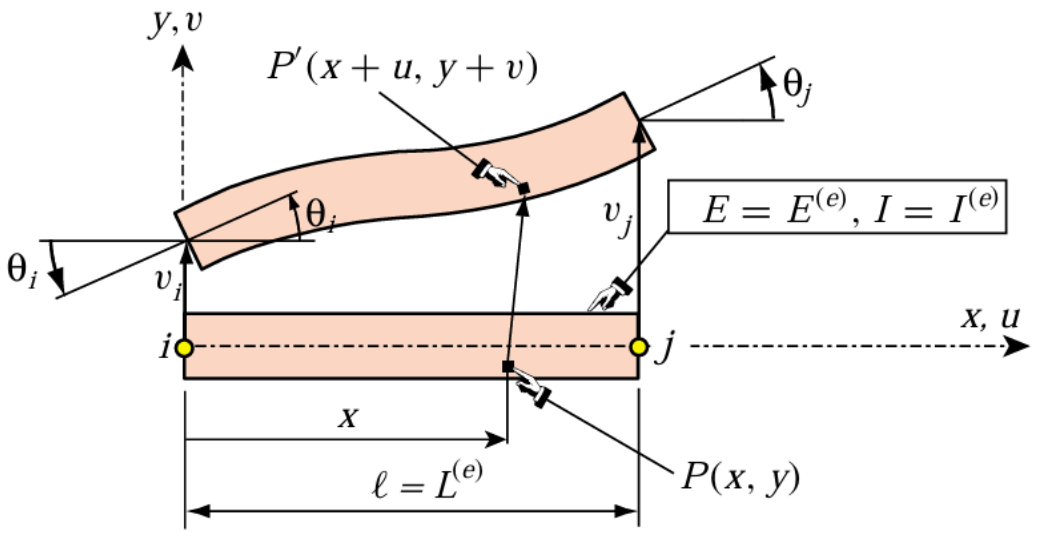
$$\Pi = U - W$$

$$U = \frac{1}{2}\int_V \sigma\, e\, dV = \frac{1}{2}\int_0^L M\kappa\, dx = \frac{1}{2}\int_0^L EI\kappa^2\, dx = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(v''\right)^2\, dx = \frac{1}{2}\int_0^L v'' EIv''\, dx.$$

$$W = \int_0^L qv\, dx.$$

- 2개의 Node로 구성되고 각각의 Node별 자유도는 병진과 회전이 존재

Degrees of freedom of beam element

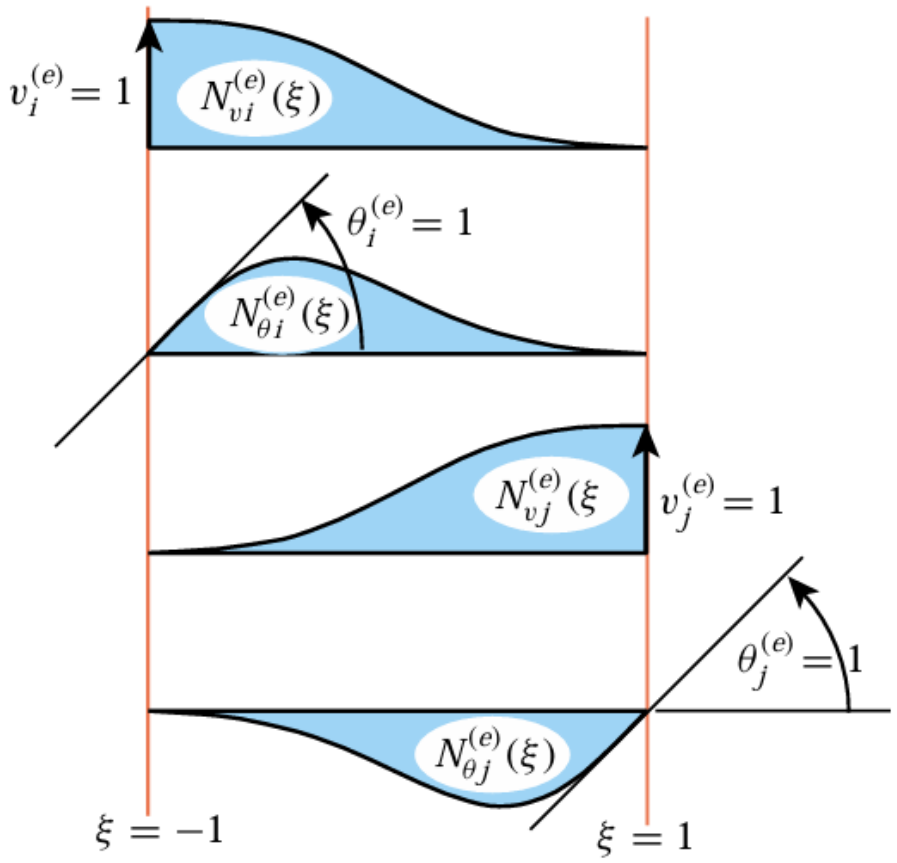


$$\mathbf{u}^{(e)} = [\, v_i^{(e)} \quad \theta_i^{(e)} \quad v_j^{(e)} \quad \theta_j^{(e)} \,]^T$$

4. Beam finite elements

(1) Shape functions

Plane beam element shape functions



$$N_{v_i}^{(e)} = \tfrac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi),$$
$$N_{\theta_i}^{(e)} = \tfrac{1}{8}\ell(1-\xi)^2(1+\xi),$$
$$N_{v_j}^{(e)} = \tfrac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi),$$
$$N_{\theta_j}^{(e)} = -\tfrac{1}{8}\ell(1+\xi)^2(1-\xi).$$

Shape functions in terms of natural coordinate ξ

$$v^{(e)} = [\, N_{v_i}^{(e)} \quad N_{\theta_i}^{(e)} \quad N_{v_j}^{(e)} \quad N_{\theta_j}^{(e)} \,] \begin{bmatrix} v_i^{(e)} \\ \theta_i^{(e)} \\ v_j^{(e)} \\ \theta_j^{(e)} \end{bmatrix} = \mathbf{N}\,\mathbf{u}^{(e)}$$

$$\xi = \frac{2x}{\ell} - 1$$

$$N_{v_i}^{(e)} = \tfrac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi), \qquad N_{v_j}^{(e)} = \tfrac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi),$$
$$N_{\theta_i}^{(e)} = \tfrac{1}{8}\ell(1-\xi)^2(1+\xi), \qquad N_{\theta_j}^{(e)} = -\tfrac{1}{8}\ell(1+\xi)^2(1-\xi).$$

5. The finite element equations

Element stiffness and consistent node forces

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\ell}\left[\, 6\frac{\xi}{\ell} \quad 3\xi - 1 \quad -6\frac{\xi}{\ell} \quad 3\xi + 1 \,\right]$$

$$\Pi^{(e)} = \tfrac{1}{2}\mathbf{u}^{(e)\,T}\mathbf{K}^{(e)}\mathbf{u}^{(e)} - \mathbf{u}^{(e)\,T}\mathbf{f}^{(e)}$$

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_0^{\ell} EI\ \mathbf{B}^T\mathbf{B}\, dx = \int_{-1}^{1} EI\ \mathbf{B}^T\mathbf{B}\ \tfrac{1}{2}\ell\, d\xi$$

$$\mathbf{f}^{(e)} = \int_0^{\ell} \mathbf{N}^T q\, dx = \int_{-1}^{1} \mathbf{N}^T q\ \tfrac{1}{2}\ell\, d\xi$$

CH14. The plane Stress Problem

학습목표 : 2차원 평면응력에 대한 유한요소 정식화를 학습한다.

- Plane Stress Problem Description
- Linear Elasticity Equation
- Finite Element Equation

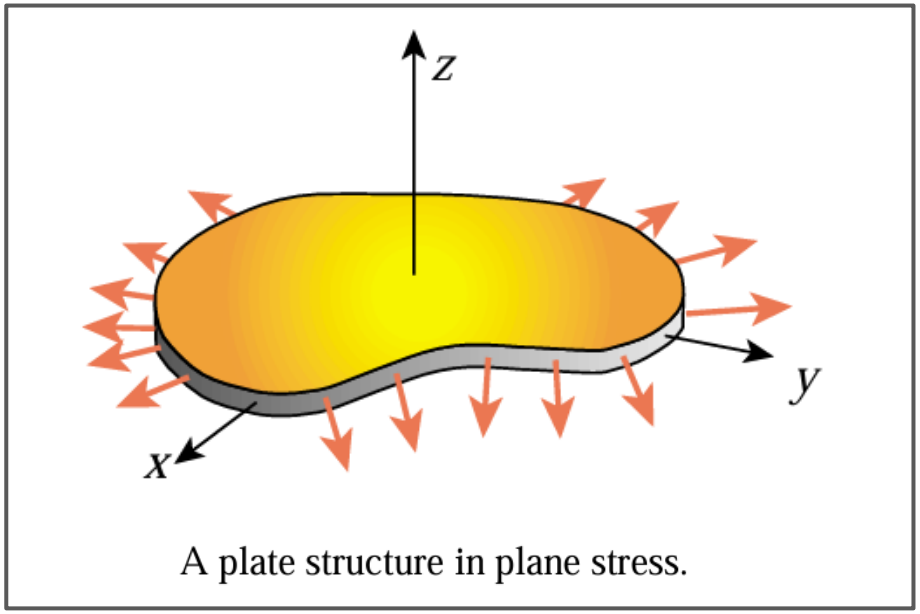
TABLE OF CONTENTS

		Page
§14.1.	**INTRODUCTION**	14–3
§14.1.1.	Plate in Plane Stress	14–3
§14.1.2.	Mathematical Model	14–4
§14.2.	**PLANE STRESS PROBLEM DESCRIPTION**	14–5
§14.2.1.	Problem Data	14–5
§14.2.2.	Problem Unknowns	14–5
§14.3.	**LINEAR ELASTICITY EQUATIONS**	14–6
§14.3.1.	Governing Equations	14–6
§14.3.2.	Boundary Conditions	14–8
§14.3.3.	Weak Forms versus Strong Form	14–9
§14.3.4.	Total Potential Energy	14–9
§14.4.	**FINITE ELEMENT EQUATIONS**	14–10
§14.4.1.	Displacement Interpolation	14–11
§14.4.2.	Element Energy	14–12
§14.4.3.	Element Stiffness Equations	14–12

1. Introduction

(1) Plate in plane stress

- 구조 역학에서는 평평하고 얇은 재료 시트를 Plate라고 함.
- 위판과 아래 판 사이의 거리를 두께라고 하며 h로 표시
- Midplane은 두 면 사이의 중간에 위치하며 midiplane에 수직인 방향을 transverse방향
- midplane에 평행한 방향을 평면 in-plane 방향.
- Global축 z는 transverse방향을 따라 정의되고 따라서 midplane방정식은 z = 0.
- x축과 y축은 midplane에 배치되어 직각 좌표계를 형성.
- 아래와 같이 두께는 얇고 넓게 퍼진 평면형태의 구조물에 x, y방향의 하중(평면방향의 하중)만 부과되어 있는 상태
  →평면응력 상태의 부재



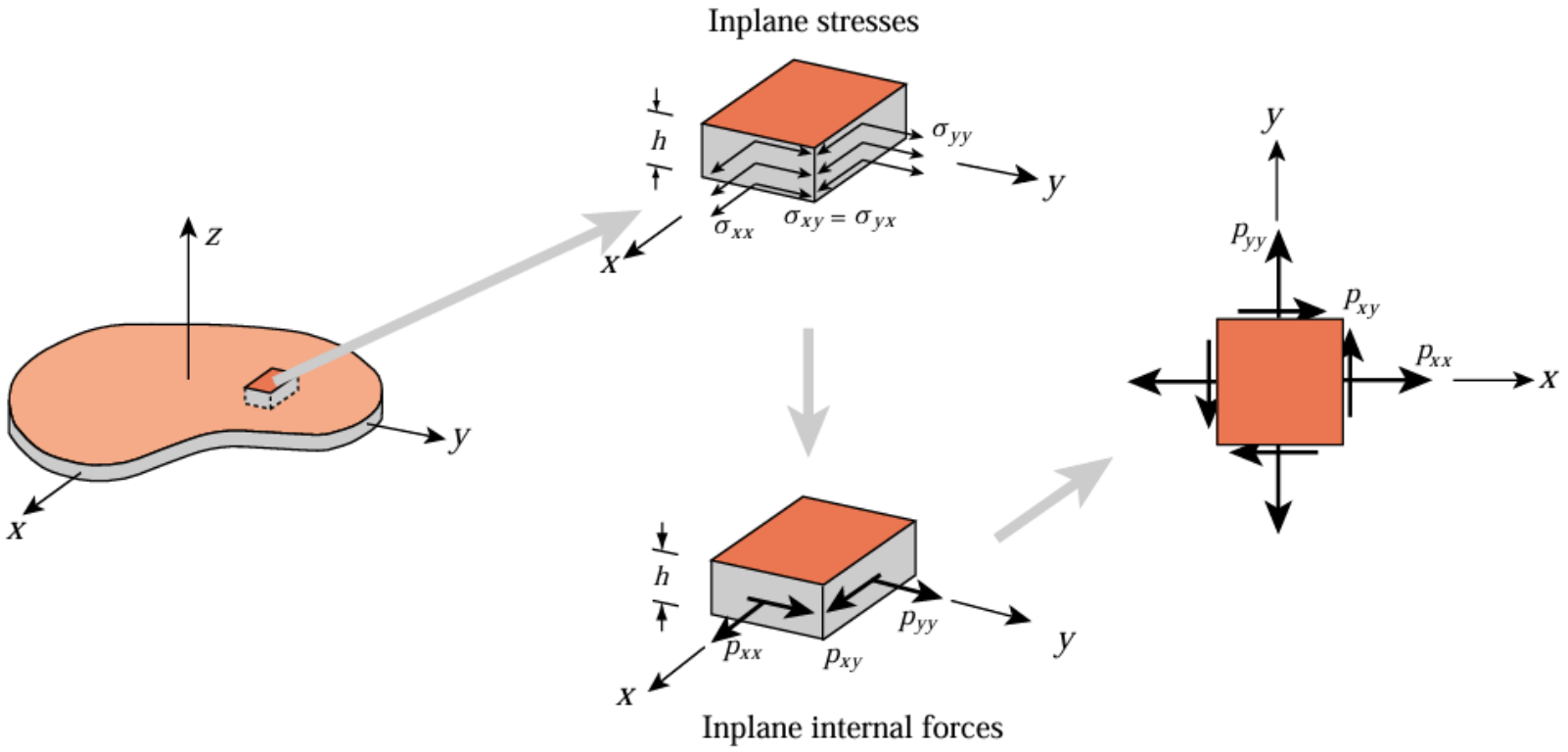
A plate structure in plane stress.

Plane stress physical assumptions

- Plate is flat and has a symmetry plane(the midplane)
- All loads and support conditions are midplane symmetric
- Thickness dimension is much smaller than inplane dimensions
- Inplane displacements, strains and stresses uniform through thickness
  변위, 변형율, 응력 등이 xy 평면에서만 정의되고 두께 방향으로의 값은 동일하다. 즉, xy지점이 같다면 z축으로의 변화는 없다
- Transvers stress σ_{zz}, σ_{xz} and σ_{yz}, negligible
  응력이 있는 경우(z성분이 포함된 응력)은 0이다.
- Plate fabricated of homogeneous material through thickness

** 자동차나 가전제품의 외관(길이나 넓이에 비해 두께가 매우 작은 경우 하중을 받고 있는 상태가 평면응력 상태)

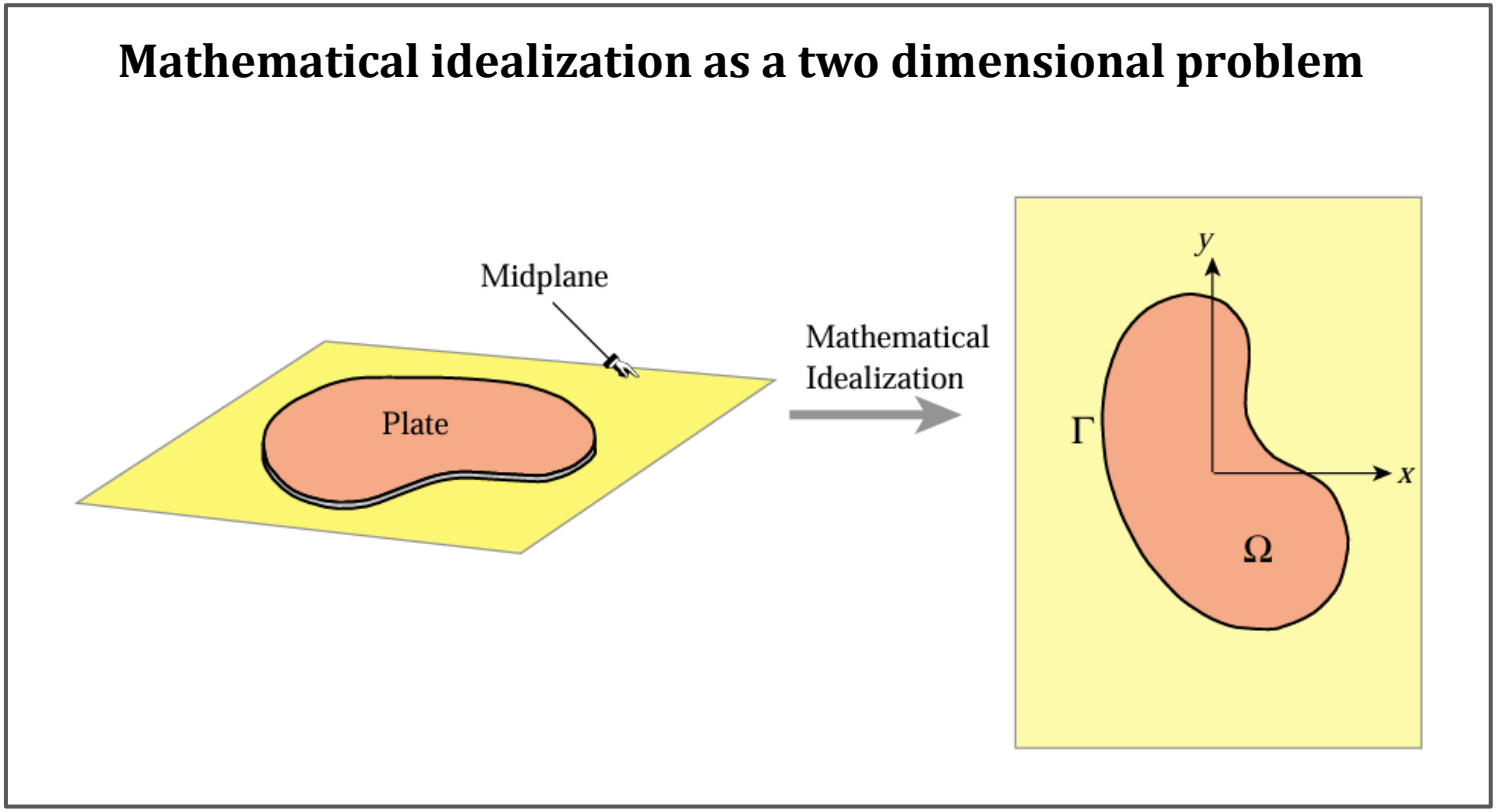
Inplane force are obtained by stress integration through thickness



- 미소요소에서 두께방향(h)으로 응력이 동일한 것으로 가정하고 2차원 이므로 x, y 방향으로만,
- 수직응력 σ_{xx}, σ_{yy}과 전단응력 σ_{xy} 각각 3개 존재
- 수직변형율 ε_x, ε_y와 전단변형율 γ_{xy} 각각 3개 존재
- 수직하중 p_{xx}, p_{yy}과 전단력 p_{xy} 각각 3개 존재
- x 방향 변위u_x와 y방향 변위 u_y 각각 2개 존재

(2) Mathematical model

- 3차원 plate를 midplane으로 잘라서 2차원 평면화(z는 무시하고 x, y만 고려함)
- 평면화 된 2차원 Geometry를 경계와 내부영역으로 모델링



2. Plane stress problem description

(1) Problem data

The Plane stress problem

- Given :
  - Geometry
  - Material properties
  - Wall fabrication(thickness only for homogenous plates)
  - Applied body force 체적력은 단위체적당 작용하는 하중(중력)인데 비행기나 인공위성 등에 작용하는 중력.
  - Boundary conditions :
    - prescribed boundary forces of tractions
    - prescribed displacements
- Find :
  - Inplane displacement
  - Inplane strains
  - Inplane stresses and/or internal forces

➢ 평면응력상태의 정의와 가정을 기반으로 FEM 문제를 풀기 위해 주어진 조건과 구해야 할 값을 정리

➢ 이렇게 주어진 정보로 결국 변위를 구하는 것이 목표이며 이것을 미분하여 변형율을 구하고 영율을 곱해주면 응력을 알 수 있다.

(2) Problem unknowns

- 일반적으로 3D에서는 응력 6개, 변형율6개, 변위3개로써 모두 15개의 Unknown.
- 평면응력의 경우 2차원 거동이므로 응력과 변형율이 각각 3개씩 , 변위2개 이므로 8개를 Unknown
- 전략은 앞에서와 동일하게 State variable 구하고 미분해서 나머지변수 계산

Matrix notation for internal fields

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{bmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}(x, y) = \begin{bmatrix} e_{xx}(x, y) \\ e_{yy}(x, y) \\ 2e_{xy}(x, y) \end{bmatrix}$$

γ_{xy}

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(x, y) \\ \sigma_{yy}(x, y) \\ \sigma_{xy}(x, y) \end{bmatrix}$$

τ_{xy}

$$p_{xx} = \sigma_{xx}h, \quad p_{yy} = \sigma_{yy}h, \quad p_{xy} = \sigma_{xy}h.$$

3. Linear elasticity equations

(1) Governing equations

Governing plane stress elasticity equations in matrix form

$$\begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ 2e_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}$$

: Strain-Displacement Relationship

γ_{xy}

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ 2e_{xy} \end{bmatrix}$$

: Constitutive equation(구성방정식)

τ_{xy}

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

: Equilibrium equation(평형방정식)

$$\mathbf{e} = \mathbf{D}\mathbf{u}, \qquad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\mathbf{e}, \qquad \mathbf{D}^T\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

- 미소요소에서 각 축으로 작용하는 임의 합력과 모멘트의 합력이 0일 때 정적 평형상태.
- 평형방정식은 이 정적 평형상태에서 요소 내 응력의 변화율과 체적력의 합이 0임을 증명하는 방정식

Equilibrium equations

Posted by: Pantelis Liolios | Sept. 17, 2020

A solid body is in static equilibrium when the resultant force and moment on each axis is equal to zero. This can be expressed by the equilibrium equations. In this article we will prove the equilibrium equations by calculating the resultant force and moment on each axis. A more elegant solution may be derived by using Gauss's theorem and Cauchy's formula. This approach may be found in international bibliography.

Consider a solid body in static equilibrium that neither moves nor rotates. Surface and body forces act on this body. We cut an infinitesimal parallelepiped inside the body and we analyze the forces that act on it as shown in Fig. 1. We will assume that the stress field is continuous and differentiable inside the whole body.

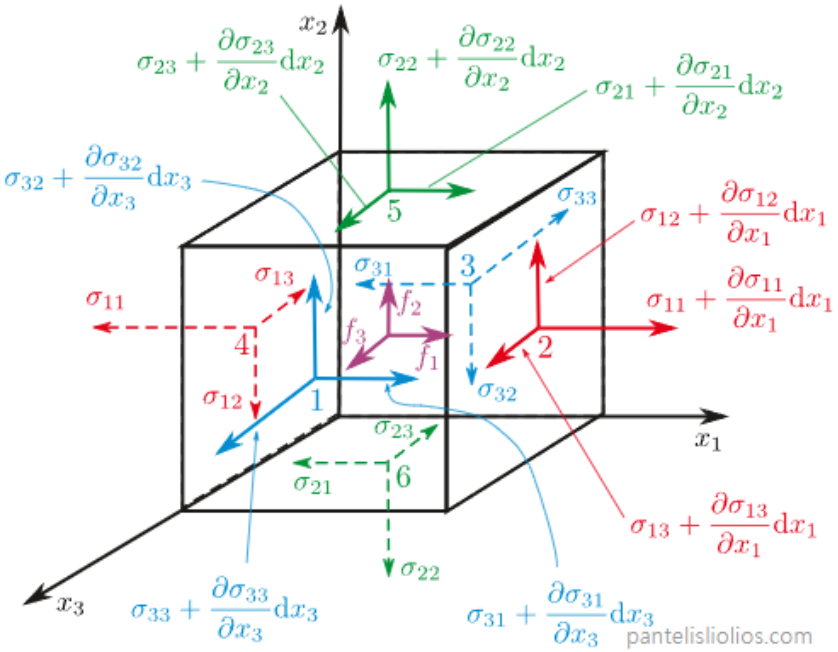


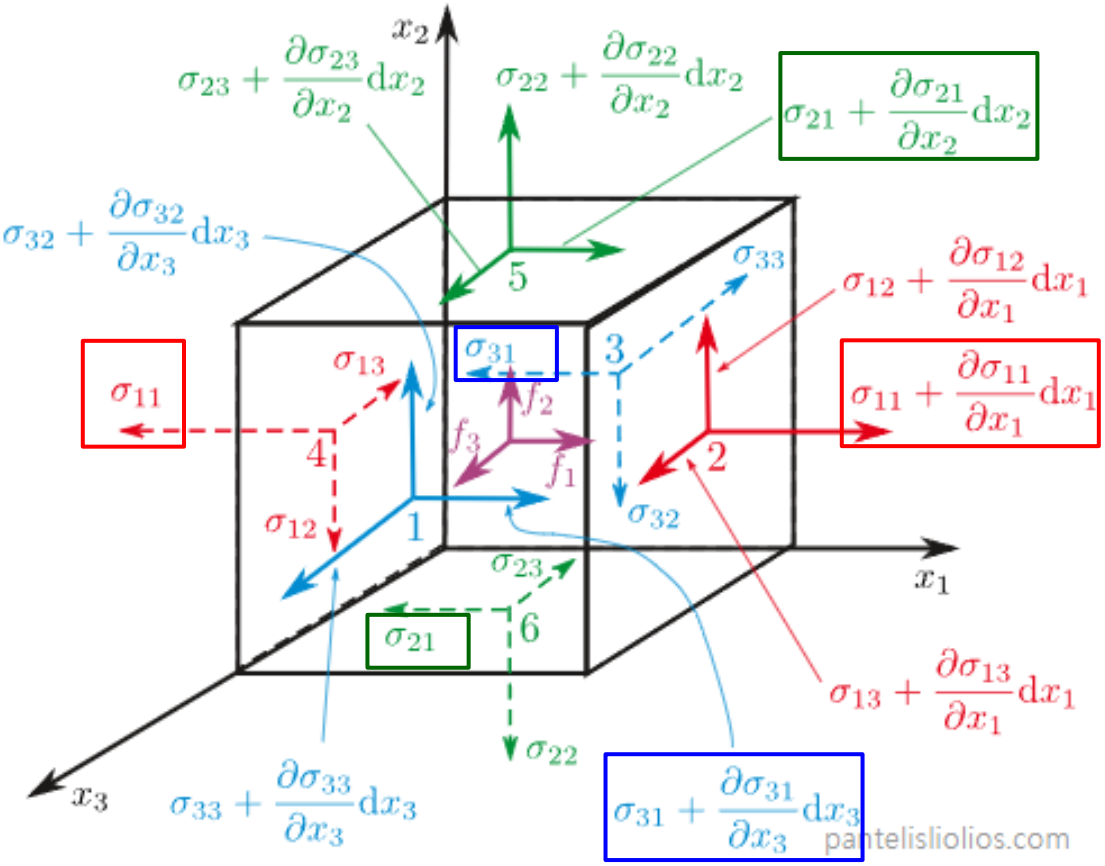
Figure 1: Infinitesimal parallelepiped representing a point in a body under static equilibrium. The stresses acting on the opposite sides of the cube are slightly different.

The stress components on each side of the cube is a function of the position since we have a non uniform but continuous stress field. For example on side 4 the normal stress is $\sigma_{11}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_{11}$. On the opposite side 2 the normal stress is $\sigma_{11}(x_1 + \mathrm{d}x_1, x_2, x_3)$. By taking under consideration Taylor's theorem we may write:

$$\sigma_{11}(x_1 + dx, x_2, x_3) = \sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 \quad (1)$$ Taylor's expansion

where the higher order terms have been neglected because they are relatively small. We follow the same procedure for all the components as shown if Fig. 1.

Equilibrium of the body demands that the resultant forces must vanish. By summing up the forces with direction parallel to axis x_1 we get:



$$\left(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1\right) dx_2 dx_3 - \sigma_{11} dx_2 dx_3 +$$
$$+ \left(\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2\right) dx_1 dx_3 - \sigma_{21} dx_1 dx_3 +$$
$$+ \left(\sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} dx_3\right) dx_1 dx_2 - \sigma_{31} dx_1 dx_2 + f_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

where dx_1, dx_2 and dx_3 are the dimensions of the parallelepiped and f_1 is the component of the body force parallel to x_1. By dividing with $dx_1 dx_2 dx_3$ we get:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + f_1 = 0 \quad (3)$$

Similarly we can obtain the equations for the other two directions. The final set of equilibrium equations is:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + f_1 = 0 \\
\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + f_2 = 0 \quad (4) \\
\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 = 0
\end{aligned}$$

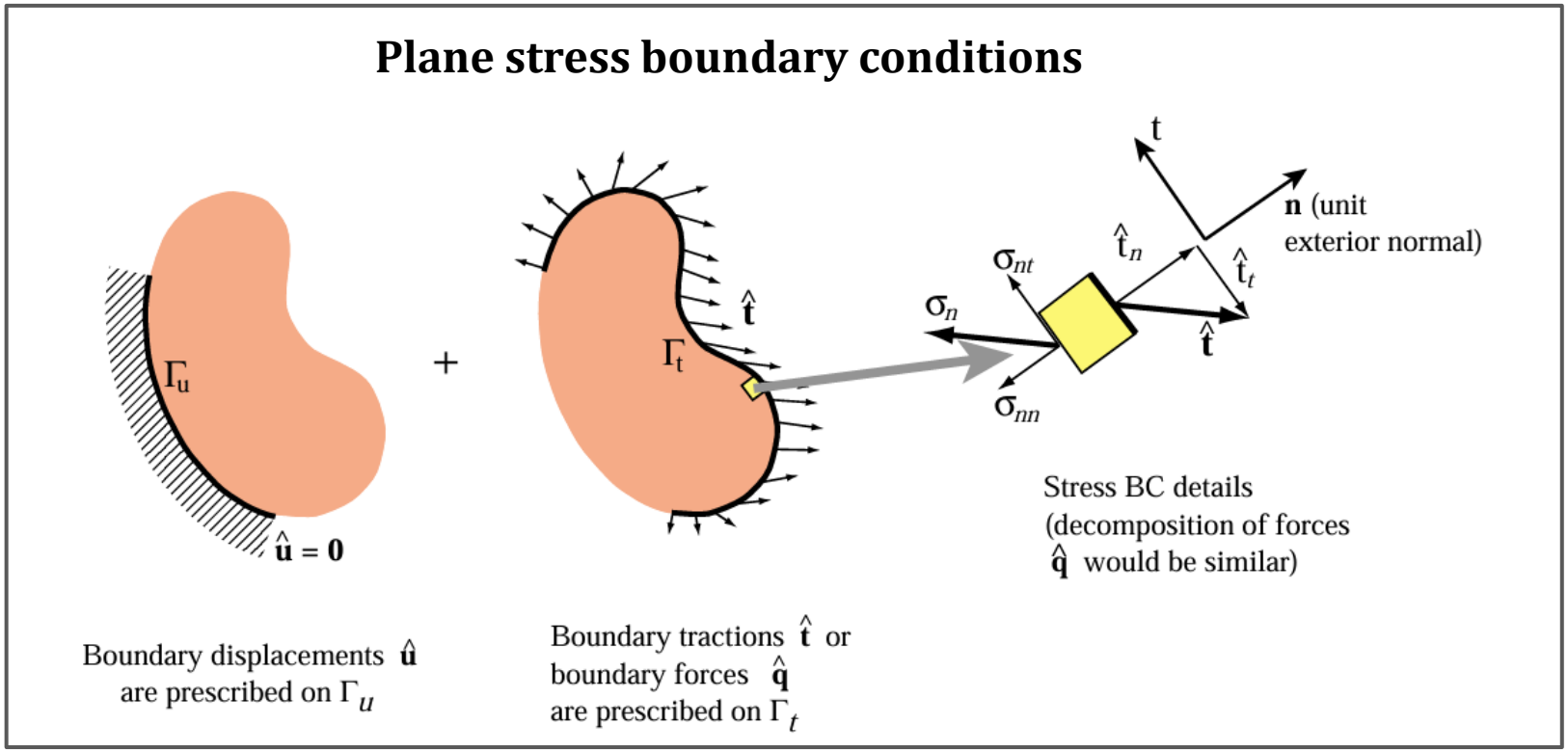
By using index notation we may write the three equilibrium equations in compact form:

$$\sigma_{ji,j} + f_i = 0 \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \cancel{\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3}} + f_1 = 0 \\
\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \cancel{\frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3}} + f_2 = 0 \\
\cancel{\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1}} + \cancel{\frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2}} + \cancel{\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3}} + \cancel{f_3} = 0
\end{aligned}$$

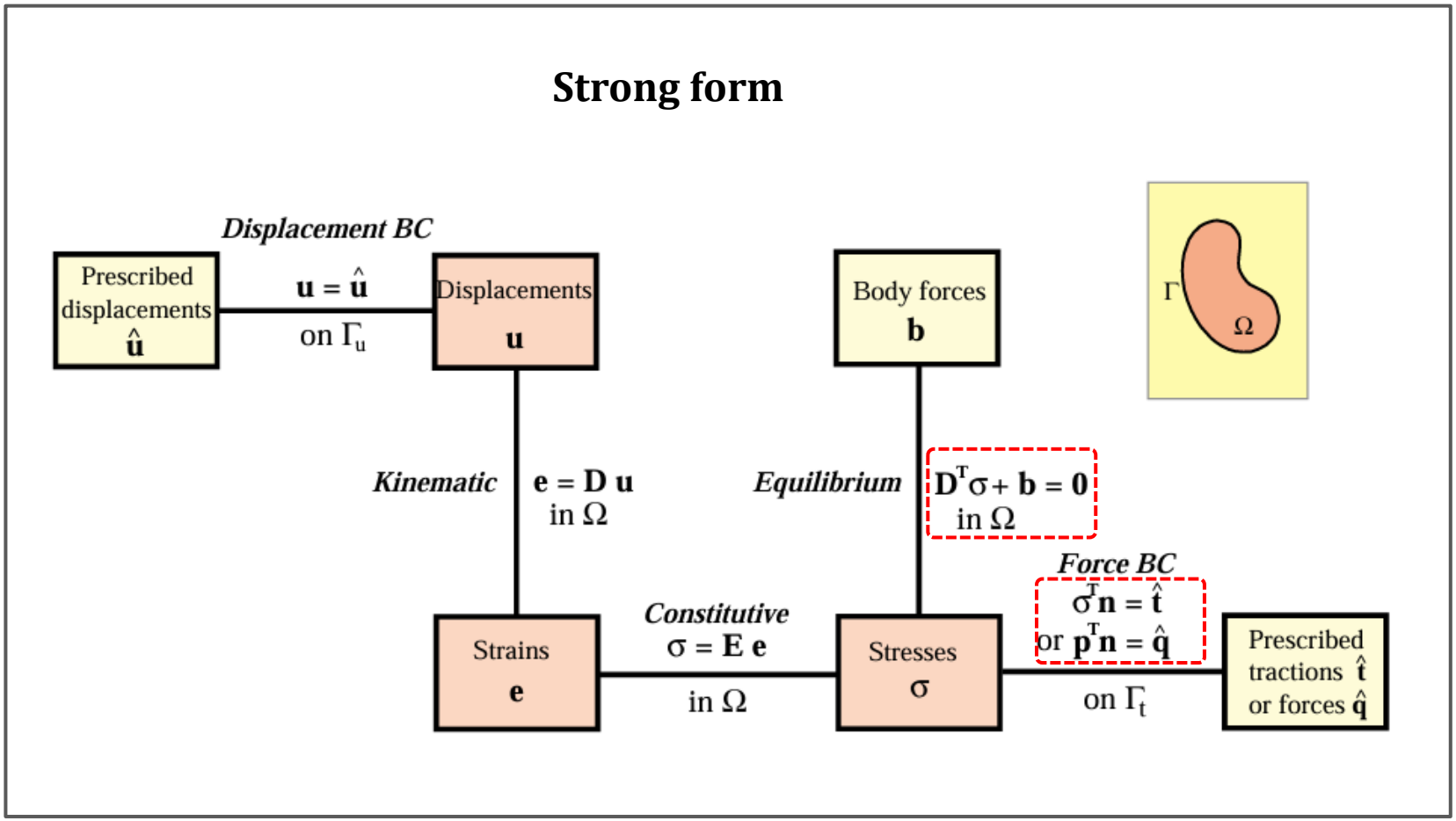
(2) Boundary condition

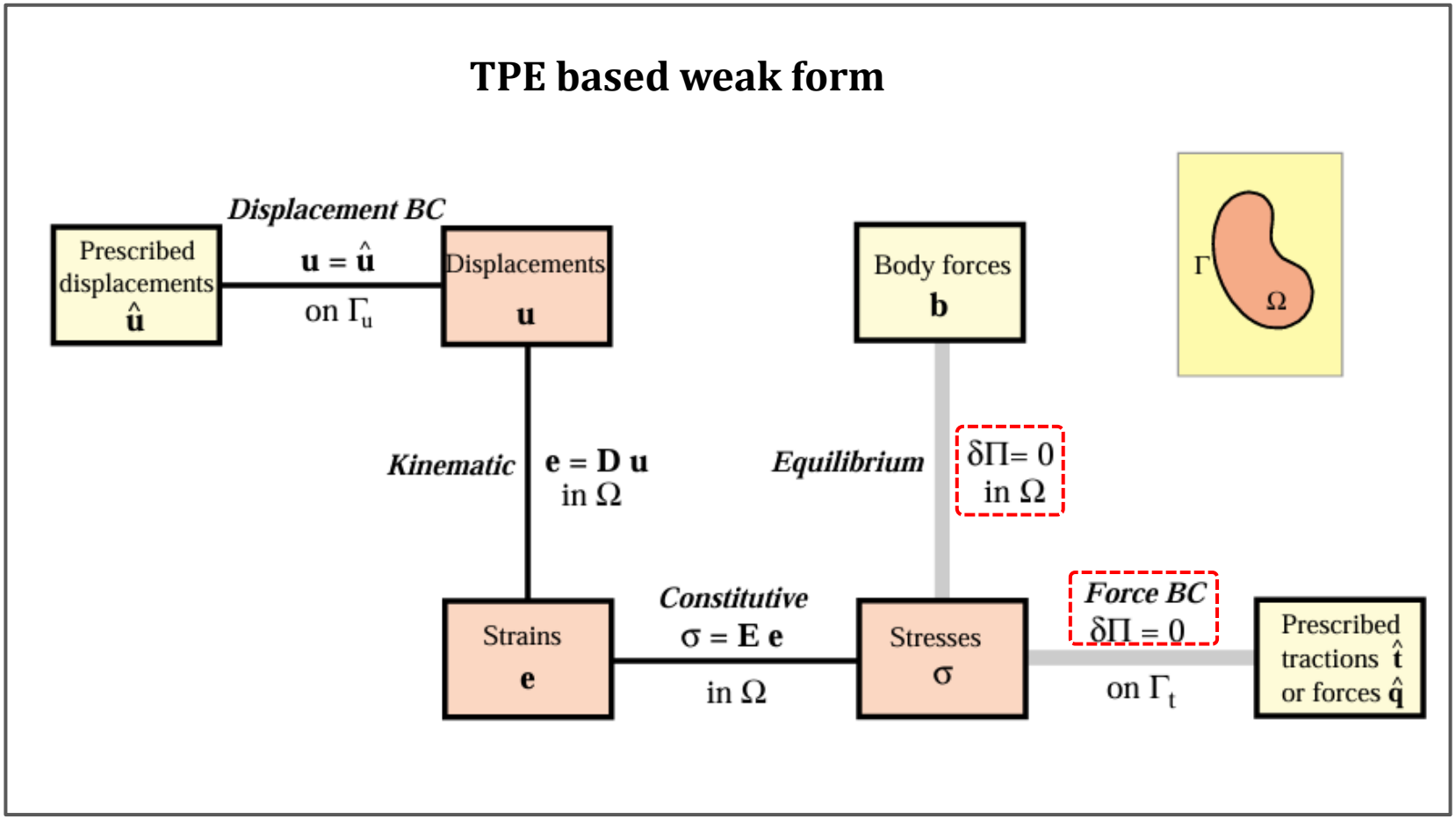
- 경계조건에는 Essential BC와 Natural BC가 있는데
- Essential는 F=ku에서 u를 대표하는 displacement.(빗금은 고정된 부분을 의미)
- Natural BC 하중을 표현하는 것
- 경계조건에서는 변위경계조건과 하중경계조건이 겹치지 않음. (공집합과 전체집합)
- 응력을 성분으로 나누는 것을 의미하는데 재료역학의 심화분야로써 본 과정에서는 다루지 않음



(3) Weak forms VS Strong form

- Strong form은 일반적으로 이용하는 미분형 지배방정식을 의미
- 이 때 Strong form으로 기술된 지배방정식은 해가 되는 함수에 강한(strong) 연속성과 미분가능성을 부과함.
- Weak form은 이러한 Strong form형태의 지배방정식으로부터 해에 부과되는 요구조건들(연속성, 미분가능성)을 약하게(weak) 만들어주는 지배방정식의 다른 형태.
- Strong form을 만족하는 모든 해는 weak form을 만족하지만, 역은 성립하지 않음
- 따라서, FEM에서 Weak form 을 만족하는 해는, 더 true solution(strong form 만족)에 가까워 지기 위해 더 세밀한 격자와 작은 time step size가 요구됨.
- Strong form 은 주어진 도메인에서 시스템의 평형 상태를 찾기 위한 방정식들이라면, weak form은 Galerkin method를 이용하는, 즉 평형상태를 만족하는, 에너지가 최소화 되는 해(일반 적으로 변위)를 찾기 위한 식이다.
- Strong form은 미분방정식의 형태를 띄우며, weak form 의 경우 적분방정식의 형태로 나타낸다.


Strong form
Displacement BC
Prescribed displacements $\hat{\mathbf{u}}$
$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}$
on Γ_u
Displacements $\mathbf{u}$
Body forces $\mathbf{b}$
Γ
Ω
Kinematic
$\mathbf{e} = \mathbf{D}\,\mathbf{u}$
in Ω
Equilibrium
$\mathbf{D}^T\sigma + \mathbf{b} = \mathbf{0}$
in Ω
Force BC
$\sigma^T\mathbf{n} = \hat{\mathbf{t}}$
or $\mathbf{p}^T\mathbf{n} = \hat{\mathbf{q}}$
Constitutive
$\sigma = \mathbf{E}\,\mathbf{e}$
in Ω
Strains $\mathbf{e}$
Stresses σ
on Γ_t
Prescribed tractions $\hat{\mathbf{t}}$ or forces $\hat{\mathbf{q}}$


TPE based weak form
Displacement BC
Prescribed displacements $\hat{\mathbf{u}}$
$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}$
on Γ_u
Displacements $\mathbf{u}$
Body forces $\mathbf{b}$
Γ
Ω
Kinematic
$\mathbf{e} = \mathbf{D}\,\mathbf{u}$
in Ω
Equilibrium
δΠ= 0
in Ω
Constitutive
$\sigma = \mathbf{E}\,\mathbf{e}$
in Ω
Strains $\mathbf{e}$
Stresses σ
Force BC
δΠ = 0
on Γ_t
Prescribed tractions $\hat{\mathbf{t}}$ or forces $\hat{\mathbf{q}}$

(4) Weak forms VS Strong form

- 포텐셜을 변위u의 함수로 만듦
- 내부에너지 U를 변형율 e로 표현함으로써 변위u로 나타내었고 외력에 의한 일 W 도 u의 함수로 표현함.

Total potential energy of plate in plane stress

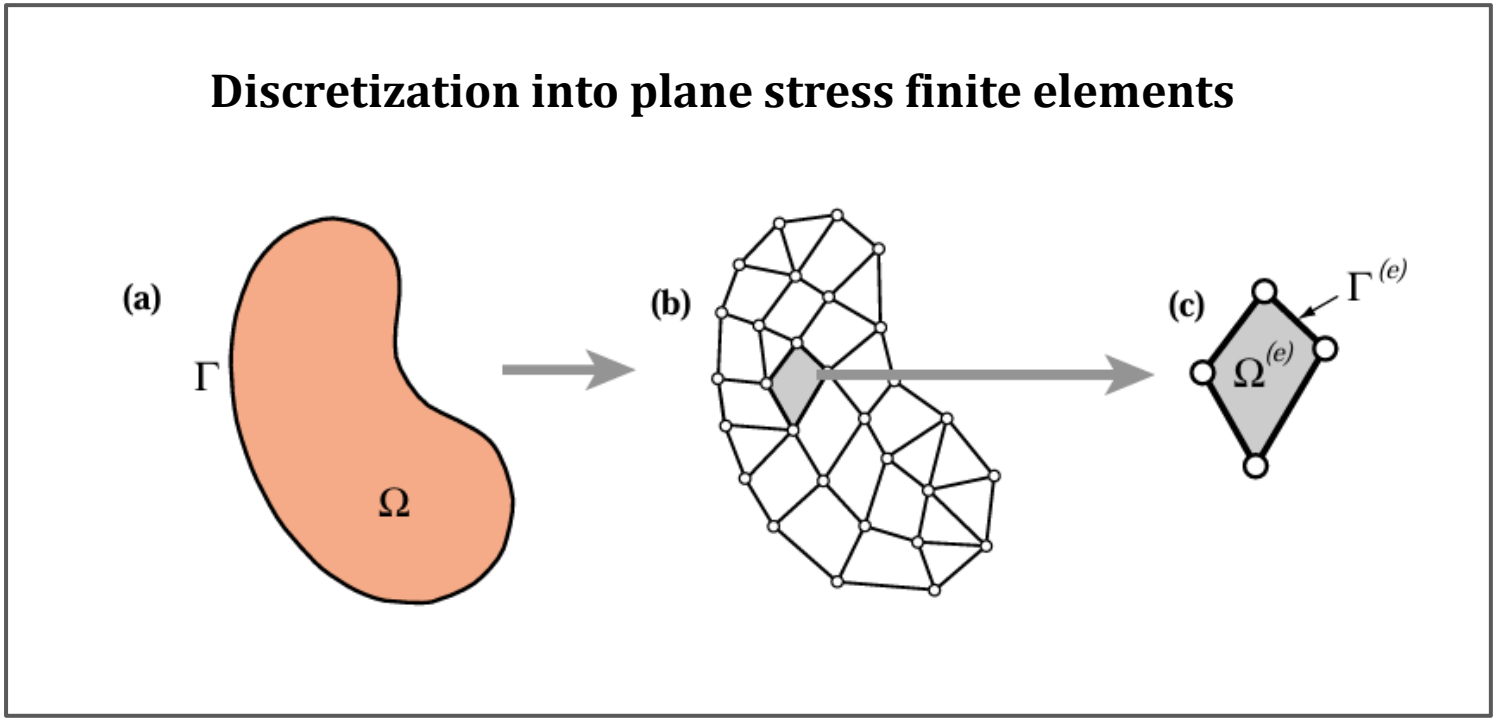
$$\boxed{\Pi = U - W.}$$

$$U = \frac{1}{2}\int_{\Omega} h\,\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{e}\,d\Omega = \frac{1}{2}\int_{\Omega} h\,\mathbf{e}^T\mathbf{E}\mathbf{e}\,d\Omega.$$

$$W = \int_{\Omega} h\,\mathbf{u}^T\mathbf{b}\,d\Omega + \int_{\Gamma_t} h\,\mathbf{u}^T\hat{\mathbf{t}}\,d\Gamma.$$

4. Finite element equations

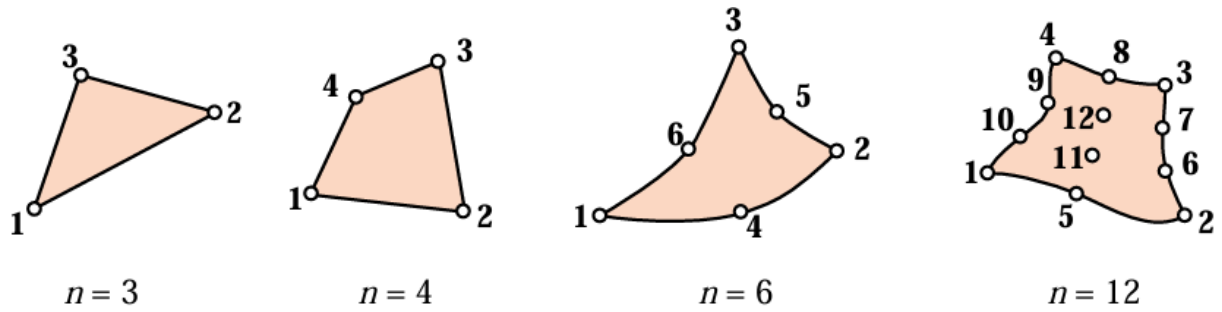
- 앞에서와 같이 만들어진 포텐셜을 최소화 하는 방향으로 수식을 유도하면 유한요소 방정식(F=ku)이 유도됨
- Midplane, 이산화(Meshing), 등을 거치며 삼각요소, 사각요소 등으로 합쳐서 구성되기도 함.
- 아래그림에서 특정 노드의 경우 이 노드는 주변 4개의 요소에 의해 공통적으로 보유되는 노드 이므로 각 요소에서 계산된 값을 더해야 함.
- 요소에서 계산된 값을 합 할 때(어셈블링 시) 각 요소의 로컬화 된 좌표를 글로벌 좌표인 하나의 기준으로 변환해야 함(Globalization).
- 이후 프로세스는 경계조건으로 변위를 구하는 것



(1) Displacement Interpolation

- 지금까지 일반적인 유한요소 프로세스, 평면응력 등에 대해 학습
- 실제 유한요소 해석을 위해 어떤 요소를 사용할 것인가? 삼각요소? 사각요소? 아니면 휘어진 삼각요소?
- 유한요소 결과 임의 위치에서 값을 알기 위해서는 요소의 노드 에서의 값과 형상함수에 의해 계산하는 원리
- 각 요소 별로 형상함수가 달라지고(요소의 선택이 형상함수의 선택) 해의 수렴성과 관련됨
- 따라서 어떤 요소를 사용하는지에 따라 형상함수와 해의 수렴성이 달라짐(빠르고 정확하게)
- 사각요소가 삼각요소보다 유리하므로 가능한 사각을 사용하는 것이 좋고 특히 응력이 집중되는 곳 또는 중요설계부위는 사각요소 선택
- Conner, Edge, Hole등 에서는 사각요소의 모델링이 어려우므로 불가피 하게 삼각요소를 사용.

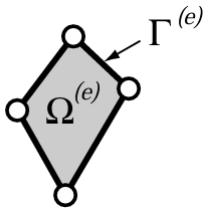
Plane stress element geometrics and node configurations



(2) Element energy

- 결국 F=Ku를 계산해서 u를 구하는 것인데 이 u를 U, W에 포함시켜서 TPE를 이용하겠다는 의미 임.

Total potential energy of plane stress element

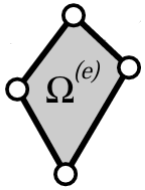


$$\delta\Pi^{(e)} = \delta U^{(e)} - \delta W^{(e)} = 0$$

$$U^{(e)} = \frac{1}{2}\int_{\Omega^{(e)}} h\,\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{e}\,d\Omega^{(e)} = \frac{1}{2}\int_{\Omega^{(e)}} h\,\mathbf{e}^T\mathbf{E}\mathbf{e}\,d\Omega^{(e)}$$

$$W^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} h\,\mathbf{u}^T\mathbf{b}\,d\Omega^{(e)} + \int_{\Gamma^{(e)}} h\,\mathbf{u}^T\hat{\mathbf{t}}\,d\Gamma^{(e)}$$

Constructing a displacement assumed element



- Node displacement vector :

$$\mathbf{u}^{(e)} = [\, u_{x1} \quad u_{y1} \quad u_{x2} \quad \dots \quad u_{xn} \quad u_{yn} \,]^T$$

- Displacement interpolation:

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{bmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & 0 & N_2^{(e)} & 0 & \dots & N_n^{(e)} & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} & 0 & N_2^{(e)} & \dots & 0 & N_n^{(e)} \end{bmatrix} \mathbf{u}^{(e)}$$

$$= \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)}$$

- N is called the shape function matrix

Element construction (cont'd)

Differentiate the displacement interpolation wrt x, y to get the strain-displacement relation

$$\mathbf{e}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & 0 & \cdots & \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} & \cdots & 0 & \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial x} \end{bmatrix} \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{B}\,\mathbf{u}^{(e)}$$

- B is called the strain-displacement matrix

(3) Element stiffness equations

Element construction (cont'd)

- Element total potential energy:

$$\Pi^{(e)} = \frac{1}{2}\mathbf{u}^{(e)\,T}\mathbf{K}^{(e)}\mathbf{u}^{(e)} - \mathbf{u}^{(e)\,T}\mathbf{f}^{(e)}$$

- Element stiffness matrix:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} h\,\mathbf{B}^T\mathbf{E}\mathbf{B}\,d\Omega^{(e)},$$

- Consistent nod force vector:

$$\mathbf{f}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} h\,\mathbf{N}^T\mathbf{b}\,d\Omega^{(e)} + \int_{\Gamma^{(e)}} h\,\mathbf{N}^T\hat{\mathbf{t}}\,d\Gamma^{(e)}.$$

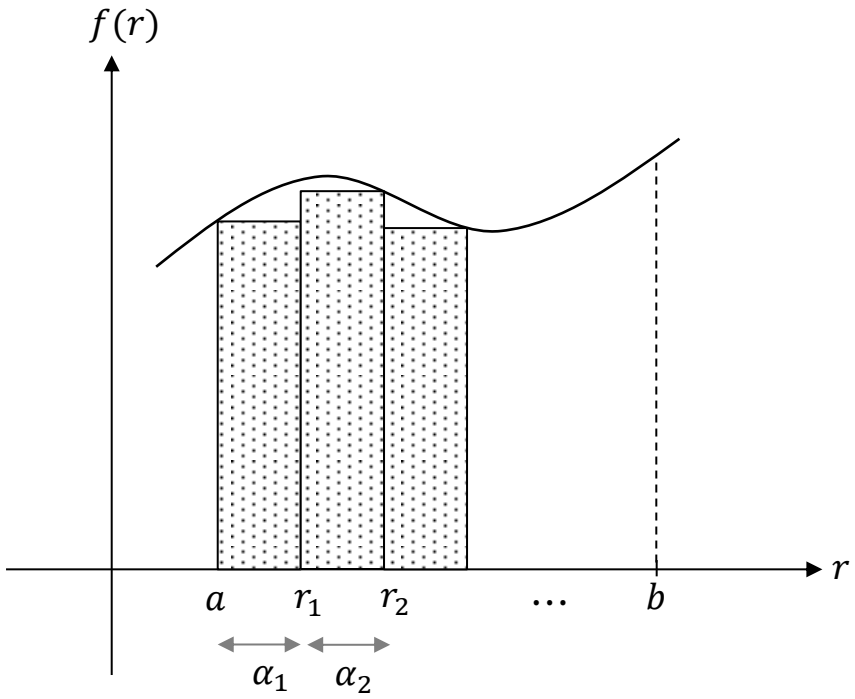
Body force surface force

Numerical integration

◆ 학습목표 : 수치적분에 대해 학습한다.

- Introduction to Numerical Integration
- Gaussian Quadrature
- Example

1. Gauss 적분



$$I = \int_a^b f(r)dr$$ 컴퓨터는 이 적분을 어떻게 계산하는가?

$$= \alpha_1 f(r_1) + \alpha_1 f(r_1) + \cdots + \alpha_n f(r_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(r_i)$$

예) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$ 를 Gauss적분법으로 계산하라. (2점 적분)

$$x_1 = \frac{1}{2}\{1-(-0.57735)\}\times 0 + \frac{1}{2}\{1+(-0.57735)\}\times \pi/2 = 0.33194$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(1-0.57735)\times 0 + \frac{1}{2}(1+0.57735)\times \pi/2 = 1.2388$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i f\{x(\xi_i)\}$$

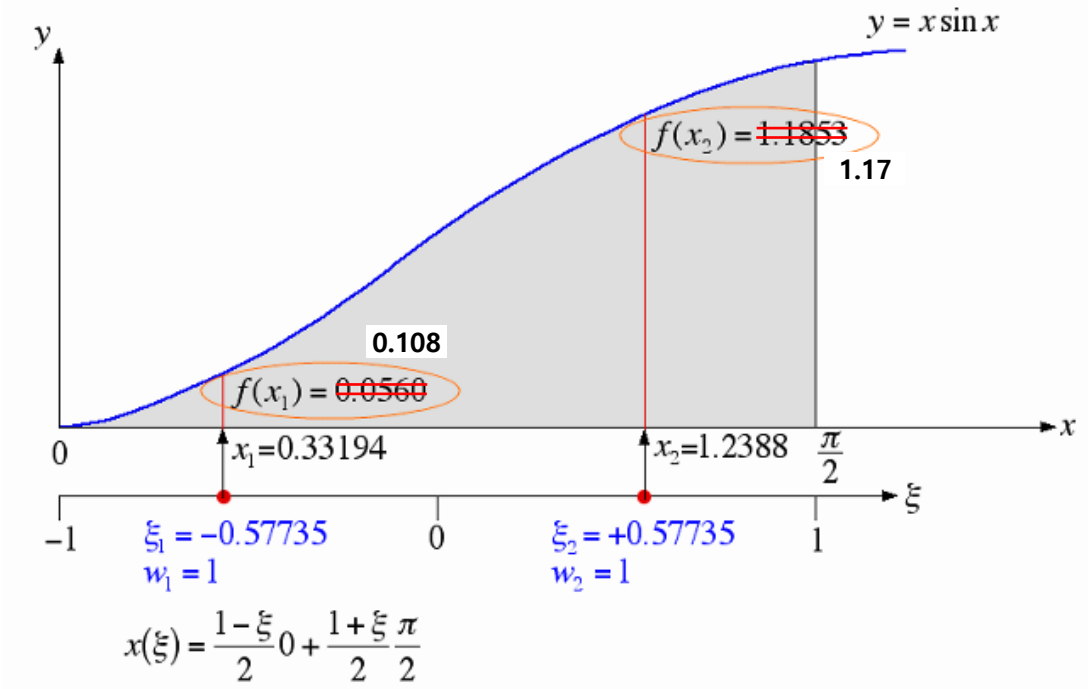
축척 加重値 Weight 적분점의 정규화 좌표

$$f(x_1) = 0.33194\sin(0.33194) = 0.108$$

$$f(x_2) = 1.2388\sin(1.2388) = 1.17$$

$$\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx \approx \frac{\pi/2-0}{2}(0.108\times 1.0 + 1.17\times 1.0) = 1.003$$

(정확한 적분값은 1.0)



$$x(\xi) = \frac{1-\xi}{2}0 + \frac{1+\xi}{2}\frac{\pi}{2}$$

Points(n)	Weighting Factors	Function Arguments
2	$c_1 = 1$	$\zeta_1 = -0.577350269$
	$c_2 = 1$	$\zeta_2 = 0.577350269$
3	$c_1 = 0.5555556$	$\zeta_1 = -0.774596669$
	$c_2 = 0.8888889$	$\zeta_2 = 0.0$
	$c_3 = 0.5555556$	$\zeta_3 = 0.774596669$
4	$c_1 = 0.3478548$	$\zeta_1 = -0.861136312$
	$c_2 = 0.6521452$	$\zeta_2 = -0.339981044$
	$c_3 = 0.6521452$	$\zeta_3 = 0.339981044$
	$c_4 = 0.3478548$	$\zeta_4 = 0.861136312$
5	$c_1 = 0.2369269$	$\zeta_1 = -0.906179846$
	$c_2 = 0.4786287$	$\zeta_2 = -0.538469310$
	$c_3 = 0.5688889$	$\zeta_3 = 0.0$
	$c_4 = 0.4786287$	$\zeta_4 = 0.538469310$
	$c_5 = 0.2369269$	$\zeta_5 = 0.906179846$
6	$c_1 = 0.1713245$	$\zeta_1 = -0.932469514$
	$c_2 = 0.3607616$	$\zeta_2 = -0.661209386$
	$c_3 = 0.4679139$	$\zeta_3 = -0.238619186$
	$c_4 = 0.4679139$	$\zeta_4 = 0.238619186$
	$c_5 = 0.3607616$	$\zeta_5 = 0.661209386$
	$c_6 = 0.1713245$	$\zeta_6 = 0.932469514$

CH.15 The Linear plane stress triangle

◆ 학습목표 : 선형삼각요소에 대한 요소강성행렬과 하중을 학습한다.

- Triangle Geometry and Coordinate System
  : Triangular Coordinates, Linear Interpolation

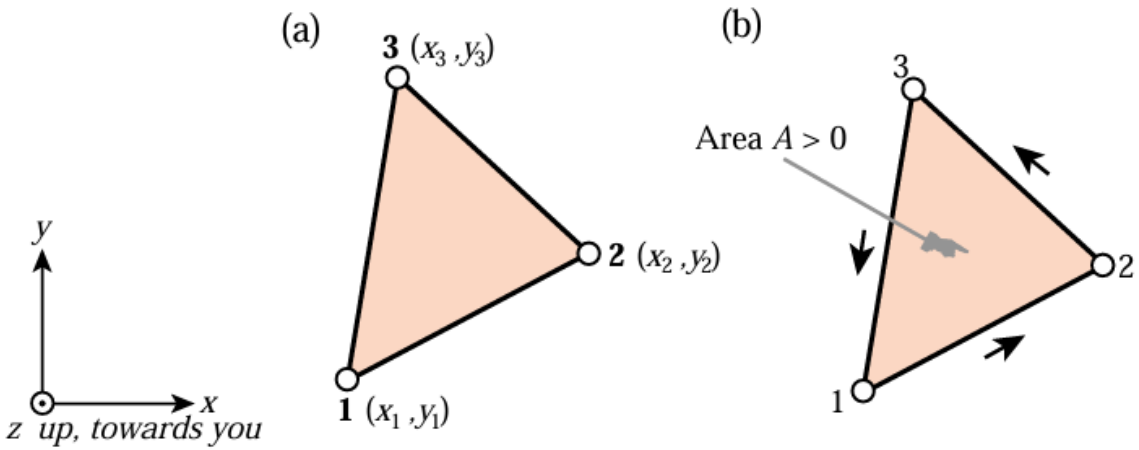
- Element Derivation
  : The Stiffness Matrix, The Consistent Nodal Force Vector

TABLE OF CONTENTS

		Page
§15.1.	**INTRODUCTION**	15–3
	§15.1.1. Parametric Representation of Functions	15–3
§15.2.	**TRIANGLE GEOMETRY AND COORDINATE SYSTEMS**	15–3
	§15.2.1. Triangular Coordinates	15–4
	§15.2.2. Linear Interpolation	15–5
	§15.2.3. Coordinate Transformations	15–6
	§15.2.4. Partial Derivatives	15–6
§15.3.	**ELEMENT DERIVATION**	15–7
	§15.3.1. Displacement Interpolation	15–7
	§15.3.2. Strain-Displacement Equations	15–7
	§15.3.3. Stress-Strain Equations	15–8
	§15.3.4. The Stiffness Matrix	15–8
	§15.3.5. The Consistent Nodal Force Vector	15–9
§15.4.	***CONSISTENCY VERIFICATION**	15–10
	§15.4.1. *Checking Continuity	15–10
	§15.4.2. *Checking Completeness	15–10
§15.5.	***THE TONTI DIAGRAM OF THE LINEAR TRIANGLE**	15–11
§15.6.	***DERIVATION USING NATURAL STRAINS AND STRESSES**	15–11
	§15.6.1. *Natural Strains and Stresses	15–11
	§15.6.2. *Covariant Node Displacements	15–12
	§15.6.3. *The Natural Stiffness Matrix	15–13
§15.7.	***NOTES AND BIBLIOGRAPHY**	15–13
§15.	**References**	15–14
§15.	**Exercises**	15–15

1. Triangle geometry and coordinate systems

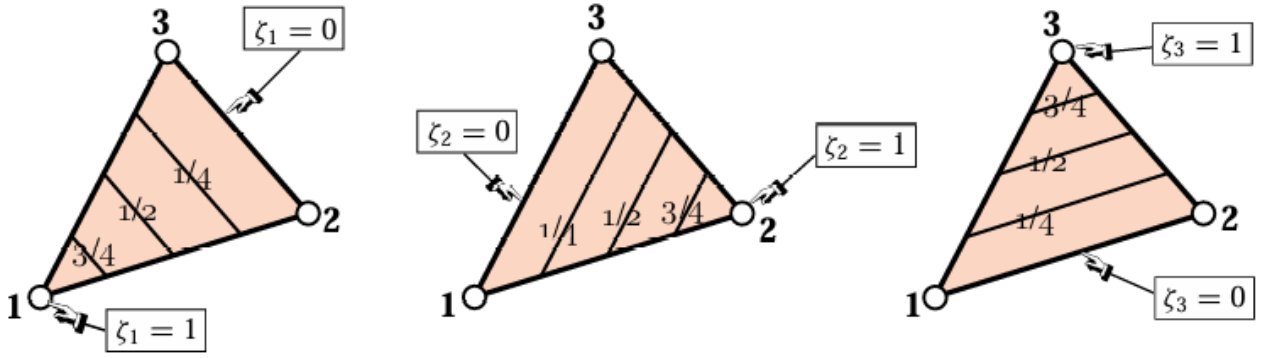
The triangle geometry and its nodal configuration



The three-node, linear-displacement plane stress triangular element:
(a) geometry; (b) area and positive boundary traversal.

(1) Triangular coordinates

Triangular coordinates



$$\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = 1.$$

(2) Linear interpolation

Using triangular coordinates to formulate linear interpolation

Cartesian form $f(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y$

Variation defined by 3 corner values $f_1, \quad f_2, \quad f_3$

Natural form

$$f(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = f_1\zeta_1 + f_2\zeta_2 + f_3\zeta_3 = [\, f_1 \quad f_2 \quad f_3 \,] \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix}$$

$$= [\, \zeta_1 \quad \zeta_2 \quad \zeta_3 \,] \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

(3) Coordinate transformations

Relating triangular & cartesian coordinates

Triangular to cartesian :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix}$$

Cartesian to triangular :

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 & y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 2A_{23} & y_{23} & x_{32} \\ 2A_{31} & y_{31} & x_{13} \\ 2A_{12} & y_{12} & x_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}$$

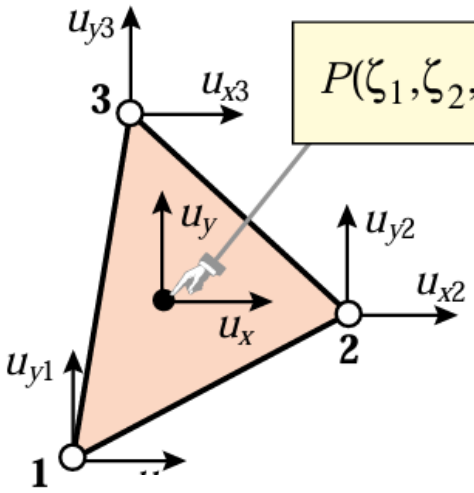
Here $x_{jk} = x_j - x_k$, $y_{jk} = y_j - y_k$

A_{jk} denotes the area subtended by corners j, k and the origin of the x–y system.

2. Element derivation

(1) Displacement interpolation

Displacement interpolation over triangle



$$u_x = u_{x1}\zeta_1 + u_{x2}\zeta_2 + u_{x3}\zeta_3,$$
$$u_y = u_{y1}\zeta_1 + u_{y2}\zeta_2 + u_{y3}\zeta_3,$$

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_1 & 0 & \zeta_2 & 0 & \zeta_3 & 0 \\ 0 & \zeta_1 & 0 & \zeta_2 & 0 & \zeta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{bmatrix} = \mathbf{N}^{(e)}\mathbf{u}^{(e)}$$

(2) Strain-displacement equations

Strain-displacement relation

$$\mathbf{e} = \mathbf{D}\mathbf{N}^{(e)}\mathbf{u}^{(e)} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{bmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{u}^{(e)}$$

(3) Stress-strain equation

Stress - strain relation

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ 2e_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{Ee}$$

(4) The stiffness matrix

Element stiffness matrix

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} h\,\mathbf{B}^T\mathbf{E}\mathbf{B}\; d\Omega^{(e)}$$

where $\Omega^{(e)}$ is the triangle domain, and h is the plate thickness that appears in the plane stress problem. Since **B** and **E** are constant, they can be taken out of the integral:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{B}^T\mathbf{E}\mathbf{B}\int_{\Omega^{(e)}} h\, d\Omega^{(e)}$$

$$= \frac{1}{4A^2}\begin{bmatrix} y_{23} & 0 & x_{32} \\ 0 & x_{32} & y_{23} \\ y_{31} & 0 & x_{13} \\ 0 & x_{13} & y_{31} \\ y_{12} & 0 & x_{21} \\ 0 & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \int_{\Omega^{(e)}} h\, d\Omega^{(e)}$$

If the plate thickness h is constant

$$\mathbf{K}^{(e)} = Ah\,\mathbf{B}^T\mathbf{E}\mathbf{B} = \frac{h}{4A}\begin{bmatrix} y_{23} & 0 & x_{32} \\ 0 & x_{32} & y_{23} \\ y_{31} & 0 & x_{13} \\ 0 & x_{13} & y_{31} \\ y_{12} & 0 & x_{21} \\ 0 & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix}$$

(5) The consistent nodal force vector

Consistent node force vector for body force

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} h\,(\mathbf{N}^{(e)})^T \mathbf{b}\, d\Omega^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} h \begin{bmatrix} \zeta_1 & 0 \\ 0 & \zeta_1 \\ \zeta_2 & 0 \\ 0 & \zeta_2 \\ \zeta_3 & 0 \\ 0 & \zeta_3 \end{bmatrix} \mathbf{b}\, d\Omega^{(e)}$$

If body force are constant over element

The simplest case is when the body force components (15.23) as well as the thickness h are constant over the element. Then we need the integrals

$$\int_{\Omega^{(e)}} \zeta_1 \, d\Omega^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \zeta_2 \, d\Omega^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \zeta_3 \, d\Omega^{(e)} = \tfrac{1}{3} A$$

$$\mathbf{f}^{(e)} = \frac{Ah}{3} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_x \\ b_y \\ b_x \\ b_y \end{bmatrix}.$$

CH.16 The Isoparametric representation

◆ 학습목표 :Geometry와 변형을 동일하게 표현하는 매개변수를 이해한다.

- Isoparametric Representation
- Triangular Element
  : Linear triangle, Quadratic triangle
- Quadrilateral Element
  : Bilinear quadrilateral, Biquadratic quadrilateral

TABLE OF CONTENTS

	Page
§16.1. **INTRODUCTION**	16–3
§16.2. **ISOPARAMETRIC REPRESENTATION**	16–3
§16.2.1. Motivation	16–3
§16.2.2. Equalizing Geometry and Displacements	16–3
§16.3. **GENERAL ISOPARAMETRIC FORMULATION**	16–5
§16.4. **TRIANGULAR ELEMENTS**	16–6
§16.4.1. The Linear Triangle	16–6
§16.4.2. The Quadratic Triangle	16–6
§16.5. **QUADRILATERAL ELEMENTS**	16–7
§16.5.1. Quadrilateral Coordinates and Iso-P Mappings	16–7
§16.5.2. The Bilinear Quadrilateral	16–8
§16.5.3. The Biquadratic Quadrilateral	16–8
§16.6. ***COMPLETENESS PROPERTIES OF ISO-P ELEMENTS**	16–9
§16.6.1. *Completeness Analysis	16–9
§16.6.2. *Completeness Checks	16–10
§16.6.3. *Completeness for Higher Variational Index	16–12
§16.7. **ISO-P ELEMENTS IN ONE AND THREE DIMENSIONS**	16–12
EXERCISES	16–13

1. Introduction

Isoparametric representation of Finite Elements

Geometry and displacement are represented by
Same set of shape functions (iso = same)

Advantages

- ***Unification : same steps for all elements***
- ***No need to distinguish straight vs curved side elements***
- ***Quick construction of shape functions***

Before isoparametric concept was discovered, FEM develpers did “Supper parametric” Elems.

Element shape functions refined,
More nodes and DOFs added

But element geometry was kept simple with straight sides

2. Isoparametric representation

(1) Motivation

For the 3 Node Triangle

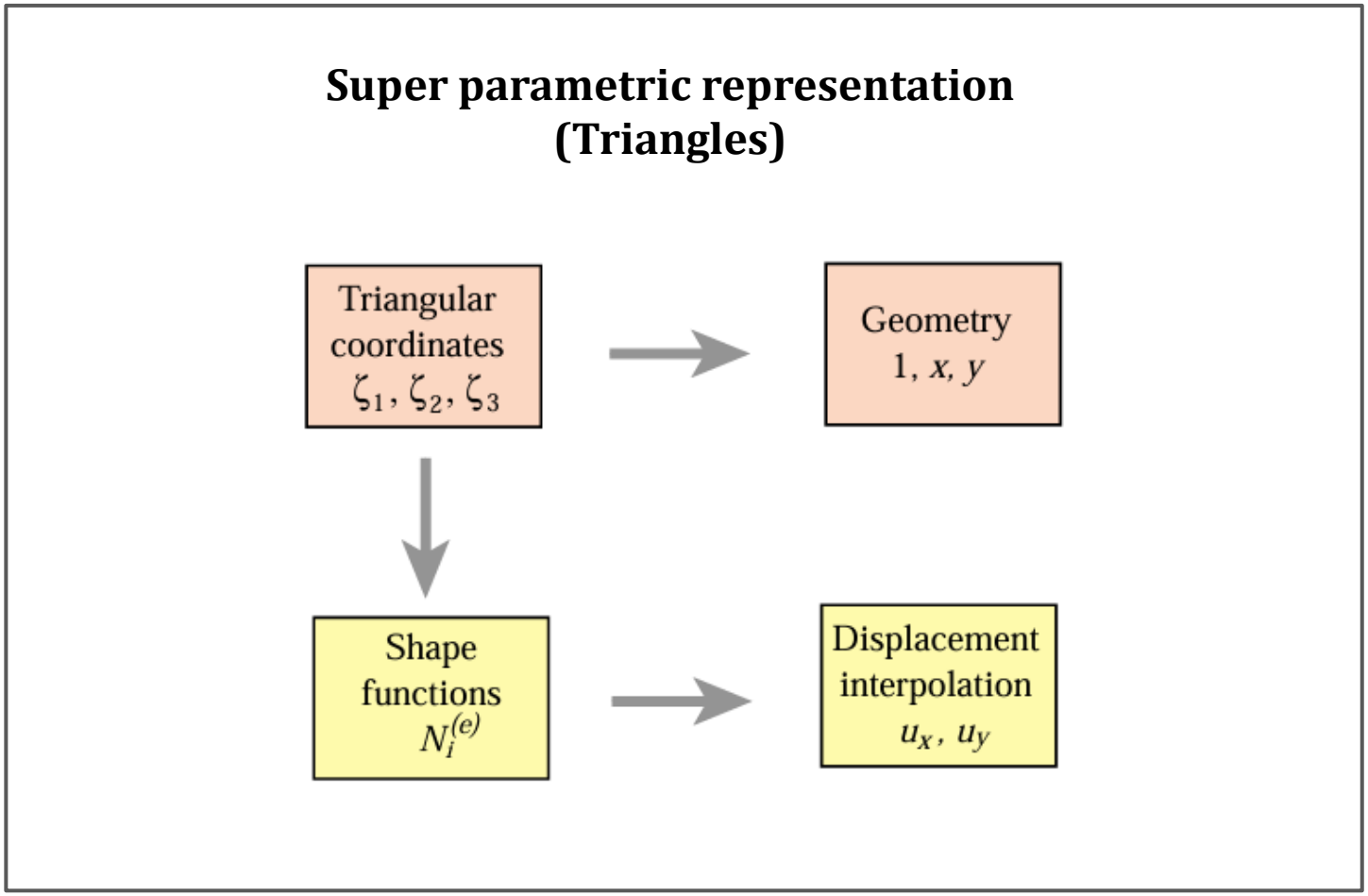
Geometric description

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix}$$

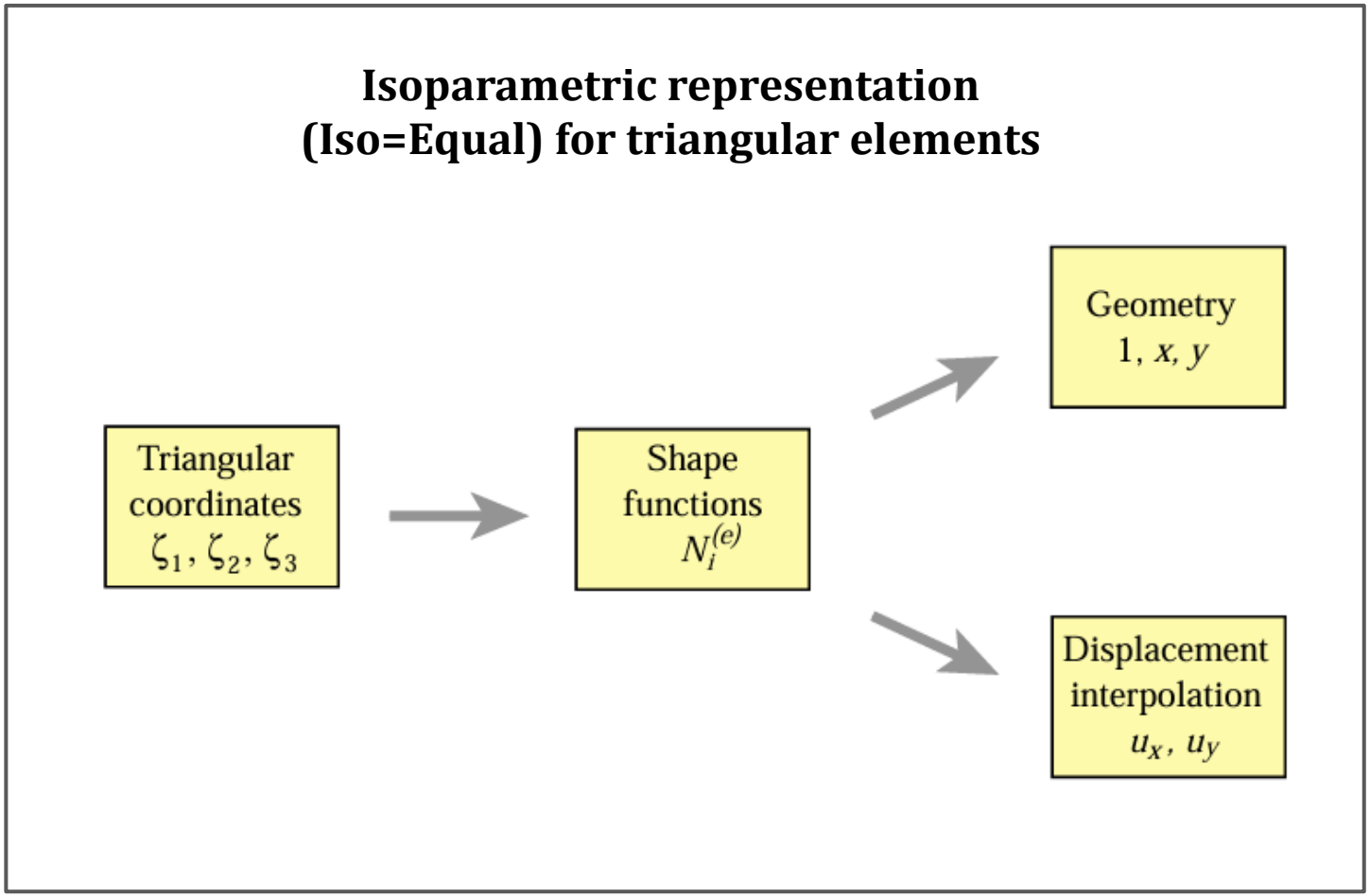
Displacement interpolation

$$u_x = u_{x1} N_1^{(e)} + u_{x2} N_2^{(e)} + u_{x3} N_3^{(e)} = u_{x1}\zeta_1 + u_{x2}\zeta_2 + u_{x3}\zeta_3$$

$$u_y = u_{y1} N_1^{(e)} + u_{y2} N_2^{(e)} + u_{y3} N_3^{(e)} = u_{y1}\zeta_1 + u_{y2}\zeta_2 + u_{y3}\zeta_3$$


Super parametric representation
(Triangles)
Triangular coordinates $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$
Geometry 1, x, y
Shape functions $N_i^{(e)}$
Displacement interpolation u_x, u_y

(2) Equalizing geometry and displacements



3. General isoparametric formulation

Iso-P representation of 2D Plane stress elements with n nodes

Element geometry

$$1 = \sum_{i=1}^{n} N_i^{(e)}, \quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i N_i^{(e)}, \quad y = \sum_{i=1}^{n} y_i N_i^{(e)}$$

Displacement interpolation

$$u_x = \sum_{i=1}^{n} u_{xi} N_i^{(e)}, \quad u_y = \sum_{i=1}^{n} u_{yi} N_i^{(e)}$$

Matrix form of above

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ u_{x1} & u_{x2} & \dots & u_{xn} \\ u_{y1} & u_{y2} & \dots & u_{yn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^{(e)} \\ N_2^{(e)} \\ \vdots \\ N_n^{(e)} \end{bmatrix}$$

More rows may be added to interpolate
Other quantities from nodes values

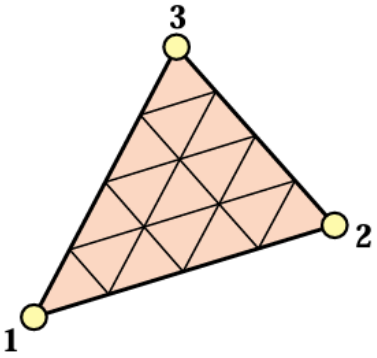
Thickness h
Temperature T

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ u_x \\ u_y \\ h \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ u_{x1} & u_{x2} & \dots & u_{xn} \\ u_{y1} & u_{y2} & \dots & u_{yn} \\ h_1 & h_2 & \dots & h_n \\ T_1 & T_2 & \dots & T_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^{(e)} \\ N_2^{(e)} \\ \vdots \\ N_n^{(e)} \end{bmatrix}$$

4. Triangular elements

(1) The linear triangle

The linear triangle

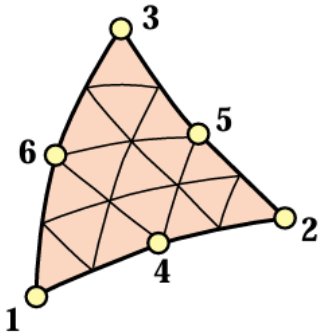


$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ u_{x1} & u_{x2} & u_{x3} \\ u_{y1} & u_{y2} & u_{y3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^{(e)} \\ N_2^{(e)} \\ N_3^{(e)} \end{bmatrix}$$

$$N_1^{(e)} = \zeta_1, \qquad N_2^{(e)} = \zeta_2, \qquad N_3^{(e)} = \zeta_3$$

(2) The quadratic triangle

The quadratic triangle



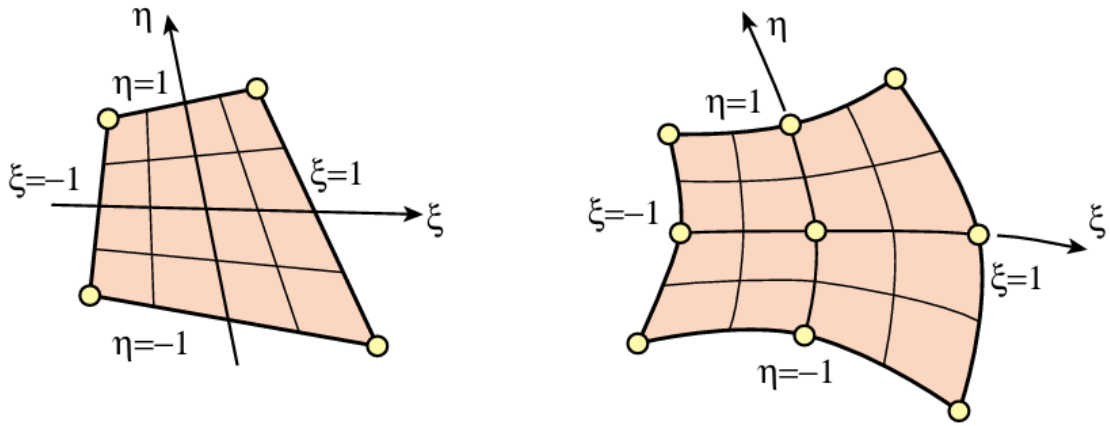
$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ u_{x1} & u_{x2} & u_{x3} & u_{x4} & u_{x5} & u_{x6} \\ u_{y1} & u_{y2} & u_{y3} & u_{y4} & u_{y5} & u_{y6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^{(e)} \\ N_2^{(e)} \\ N_3^{(e)} \\ N_4^{(e)} \\ N_5^{(e)} \\ N_6^{(e)} \end{bmatrix}$$

$$N_1^{(e)} = \zeta_1(2\zeta_1 - 1), \quad N_2^{(e)} = \zeta_2(2\zeta_2 - 1), \quad N_3^{(e)} = \zeta_3(2\zeta_3 - 1),$$
$$N_4^{(e)} = 4\zeta_1\zeta_2, \quad N_5^{(e)} = 4\zeta_2\zeta_3, \quad N_6^{(e)} = 4\zeta_3\zeta_1.$$

5. Quadrilateral elements

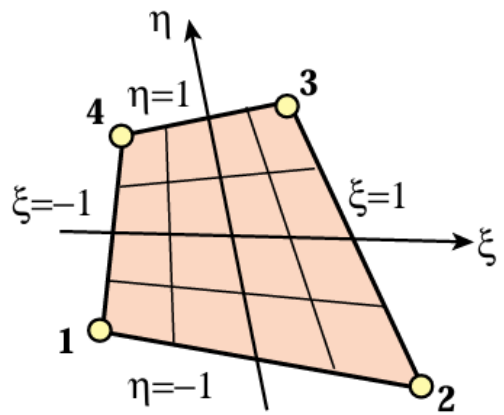
(1) Quadrilateral coordinates and Iso-P mappings

Quadrilateral coordinates ξ, η



(2) The bilinear quadrilateral

4-Node bilinear quadrilateral

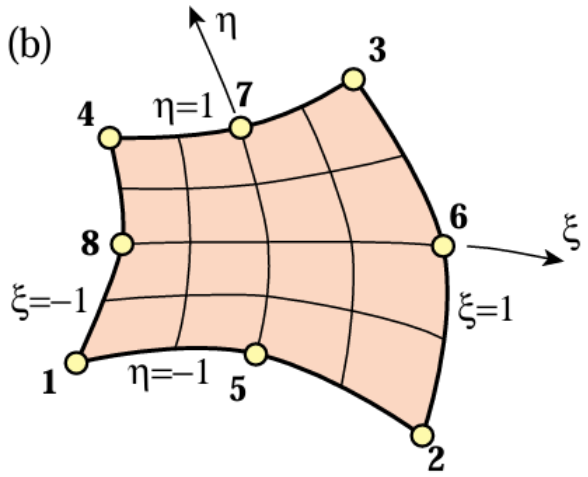


$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ u_{x1} & u_{x2} & u_{x3} & u_{x4} \\ u_{y1} & u_{y2} & u_{y3} & u_{y4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^{(e)} \\ N_2^{(e)} \\ N_3^{(e)} \\ N_4^{(e)} \end{bmatrix}$$

$$N_1^{(e)} = \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$
$$N_2^{(e)} = \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$
$$N_3^{(e)} = \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$
$$N_4^{(e)} = \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

(3) The biquadratic quadrilateral

8-Node "serendipity" quadrilateral



CH.17 Isoparametric quadrilaterals

학습목표 : 등매개변수 사변형 요소에 대해 학습한다.

- Partial Derivative Computation
  : The Jacobian, Shape Function Derivatives, The Strain-displacement Matrix
- Numerical Integration by Gauss Rules
- The Stiffness Matrix
- Example

TABLE OF CONTENTS

	Page
§17.1. **INTRODUCTION**	17–3
§17.2. **PARTIAL DERIVATIVE COMPUTATION**	17–3
§17.2.1. The Jacobian	17–3
§17.2.2. Shape Function Derivatives	17–4
§17.2.3. Computing the Jacobian Matrix	17–4
§17.2.4. The Strain-Displacement Matrix	17–5
§17.3. **NUMERICAL INTEGRATION BY GAUSS RULES**	17–5
§17.3.1. One Dimensional Rules	17–6
§17.3.2. Mathematica Implementation of 1D Rules	17–7
§17.3.3. Two Dimensional Rules	17–8
§17.3.4. Mathematica Implementation of 2D Gauss Rules	17–8
§17.4. **THE STIFFNESS MATRIX**	17–9
§17.5. ***EFFICIENT COMPUTATION OF ELEMENT STIFFNESS**	17–10
§17.6. ***INTEGRATION VARIANTS**	17–11
§17.6.1. *Weighted Integration	17–11
§17.6.2. *Selective Integration	17–12
EXERCISES	17–13

1. Introduction

Isoparametric quadrilaterals

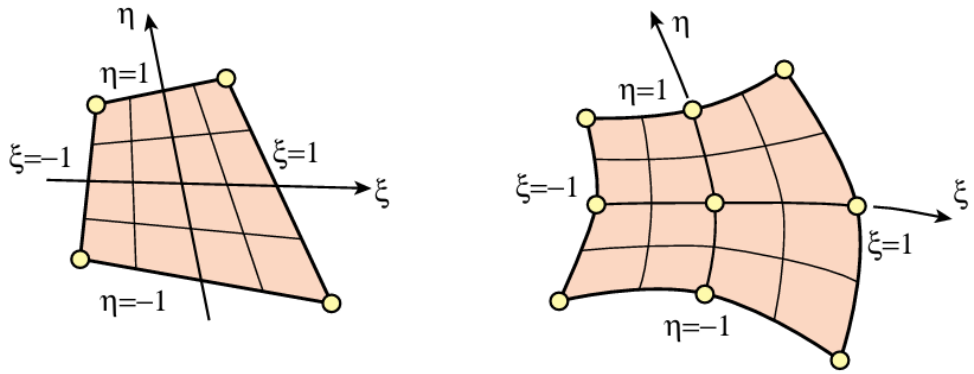
Implementation steps for element stiffness matrix

1. *Construct shape function in Quad Coordinates (chapter 18 is devoted to this topic)*
2. *Compute x-y derivatives of shape functions and build strain-displacement matrix B*
3. *Integrate h B E B over element*

2. Partial derivative computation

- 변형율 및 응력의 계산에서는 x, y 좌표에 대한 형상함수의 편미분이 필요 함 : $\epsilon_x = [B][u] = \frac{\partial N}{\partial x}[u]$
- 그러나 형상함수는 x, y의 직접함수가 아닌 자연좌표 ξ, η 의 함수로 구성됨 : $N-(\xi,\eta)-(\mathrm{x},\mathrm{y})$
- 따라서 좌표변환의 매개변수가 필요 함

Partial derivative computation



Shape functions are written in terms of ξ, η
But cartesian partials(with respect to x, y) are required to get strains & stresses

(1) The Jacobian

The Jacobian and Inverse Jacobian

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} = \mathbf{J}^T \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-T} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

Here $\mathbf{J}$ denotes the Jacobian matrix of (x, y) with respect to (ξ, η), whereas $\mathbf{J}^{-1}$ is the Jacobian matrix of (ξ, η) with respect to (x, y):

$$\mathbf{J} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{J}^{-1} = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix}$$

In finite element work $\mathbf{J}$ and $\mathbf{J}^{-1}$ are often called the *Jacobian* and *inverse Jacobian*, respectively

(2) Shape function derivatives

Shape function partial derivatives

Using chain rules

$$\frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} = \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x},$$
$$\frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} = \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

In matrix form

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial y} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

(3) Computing the Jacobian matrix

Computing the Jacobian matrix

Use the element geometry definition

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i N_i^{(e)}, \qquad y = \sum_{i=1}^{n} y_i N_i^{(e)}.$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \eta}$$

(4) The strain-displacement matrix

The strain displacement matrix B

Use those S.F. s partials to build the strain-displacement matrix B :

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ 2e_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & 0 & \cdots & \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} & \cdots & 0 & \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial x} \end{bmatrix} \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{B}\mathbf{u}^{(e)}$$

Unlike the 3-node triangle, here B=B(ξ, η) varies over quad

3. Numerical integration by Gauss rules

(1) One dimensional rules

One dimensional gauss integration rules

$$\int_{-1}^{1} F(\xi)\, d\xi \approx \sum_{i=1}^{p} w_i F(\xi_i)$$

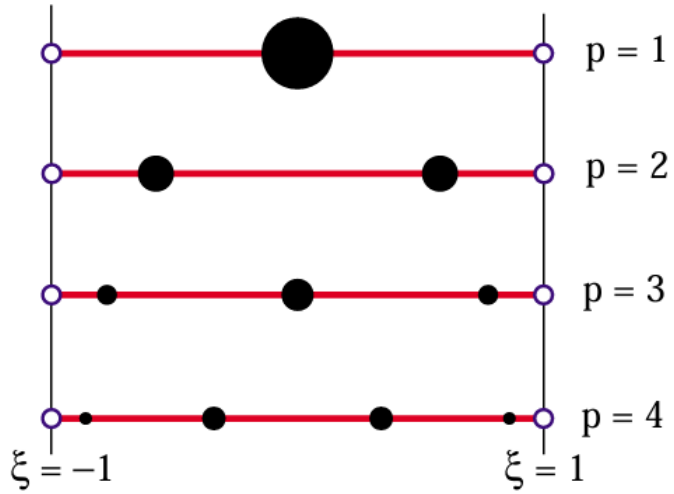
One point: $$\int_{-1}^{1} F(\xi)\, d\xi \approx 2F(0),$$

Two points: $$\int_{-1}^{1} F(\xi)\, d\xi \approx F(-1/\sqrt{3}) + F(1/\sqrt{3}),$$

Three points: $$\int_{-1}^{1} F(\xi)\, d\xi \approx \frac{5}{9} F(-\sqrt{3/5}) + \frac{8}{9} F(0) + \frac{5}{9} F(\sqrt{3/5}),$$

Four points: $$\int_{-1}^{1} F(\xi)\, d\xi \approx w_1 F(\xi_1) + w_2 F(\xi_2) + w_3 F(\xi_3) + w_4 F(\xi_4).$$

Graphical representation of the first five One-dimensional gauss integration rules



The first four one-dimensional Gauss rules $p = 1, 2, 3, 4$ depicted over the line segment $\xi = -1$ to $\xi = +1$. Gauss point locations are marked with black circles. The radii of these circles are proportional to the integration weights.

(2) Two dimensional rules

Two dimensional product Gauss rules

Canonical form of integral

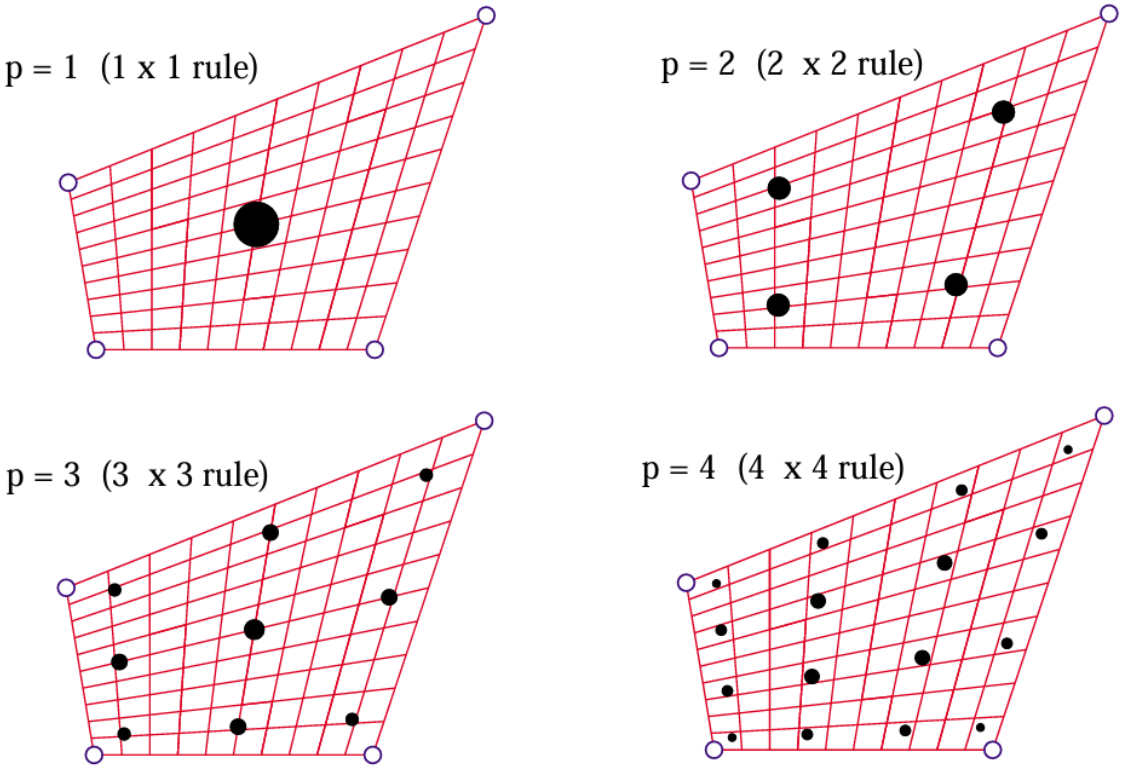
$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = \int_{-1}^{1} d\eta \int_{-1}^{1} F(\xi,\eta)\,d\xi$$

Once this is done we can process numerically each integral in turn:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = \int_{-1}^{1} d\eta \int_{-1}^{1} F(\xi,\eta)\,d\xi \approx \sum_{i=1}^{p_1}\sum_{j=1}^{p_2} w_i w_j F(\xi_i,\eta_j)$$

where p1 and p2 are the number of Gauss points in the ξ and η directions, respectively. Usually the same number $p = p_1 = p_2$ is chosen if the shape functions are taken to be the same in the ξ and η directions.

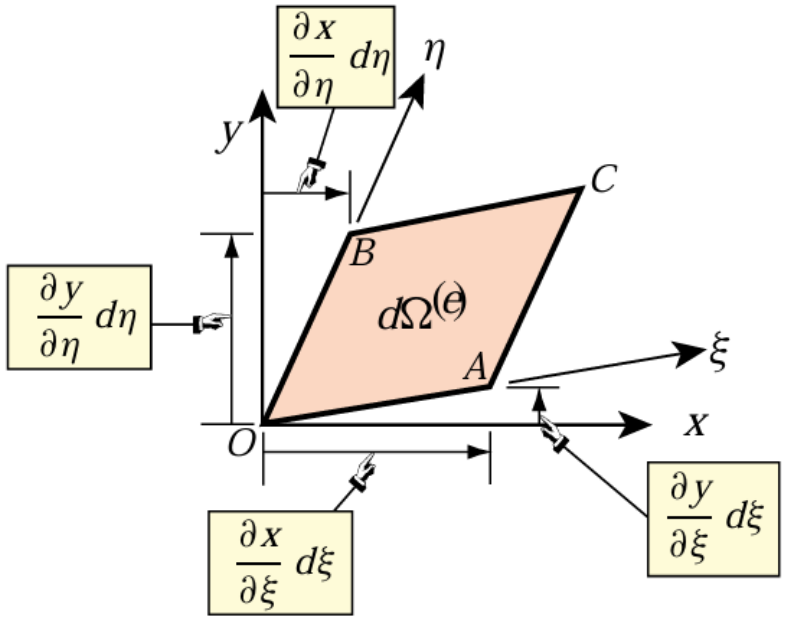
Graphical representation of the first four 2D product-type gauss Gauss integration rules With equal # of points p in each direction



The first four two-dimensional Gauss product rules $p = 1, 2, 3, 4$ depicted over a straight-sided quadrilateral region. Gauss points are marked with black circles. The areas of these circles are proportional to the integration weights.

4. The stiffness matrix

Geometric interpretation of Jacobian determinant det J=|*J*|



Geometric interpretation of the Jacobian-determinant formula.

Gauss integration of stiffness matrix

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} h\,\mathbf{B}^T\mathbf{E}\mathbf{B}\,d\Omega^{(e)}$$

Rewrite in canonical form

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{F}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

where

$$d\Omega^{(e)} = dx\,dy = \det\mathbf{J}\;d\xi\,d\eta.$$
$$\mathbf{F}(\xi,\eta) = h\,\mathbf{B}^T\mathbf{E}\mathbf{B}\det\mathbf{J}$$